

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG

Chủ biên: Nguyễn Văn Mậu

**CÁC PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN VÀ ĐỀ DỰ TUYỂN
TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG NĂM 2012**

KỶ YẾU TRẠI HÈ, MÔN TOÁN HỌC

CAO BẰNG - NĂM 2012

.

KỶ YẾU
TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG 2012
Môn TOÁN HỌC

MỤC LỤC

Lời nói đầu	5
Đào Văn Lương <i>Phương pháp lượng giác và áp dụng</i>	7
Nguyễn Việt Hà <i>Hệ phương trình không mẫu mực</i>	17
Nguyễn Văn Xã <i>Chứng minh bất đẳng thức theo phương pháp suy luận</i>	24
Nguyễn Thế Hiệp <i>Sử dụng hệ thức truy hồi trong bài toán đếm</i>	35
Lê Hồ Quý <i>Tính toán một số lớp tích phân xác định dạng đặc biệt</i>	55
Nguyễn Anh Tuấn <i>Một số phương pháp giải hệ phương trình</i>	64
Trường THPT Chuyên Hạ Long <i>Chuyên đề dãy số nguyên</i>	121
Nguyễn Ngọc Xuân, Bùi Thị Hương <i>Các phương pháp cơ bản khi giải hệ phương trình</i>	137
Trần Ngọc Thắng <i>Sử dụng dãy số trong một số dạng bài tập về phương trình hàm trên tập Z</i>	154
Đề thi chính thức <i>Môn Toán, Trại hè Hùng Vương 2011</i>	155

Đáp án đề thi chính thức	
<i>Môn Toán, Trại hè Hùng Vương 2011</i>	159
Đề thi dự bị	
<i>Môn Toán, Trại hè Hùng Vương 2011</i>	160
Đáp án đề thi dự bị	
<i>Môn Toán, Trại hè Hùng Vương 2011</i>	161

=====

Lời nói đầu

Hoạt động bồi dưỡng theo các cụm, khu vực theo địa hình và đặc thù văn hoá, điển hình là các chương trình hoạt động của Trại hè Hùng Vương của khối các trường THPT chuyên khu vực vùng núi phía bắc và trung du Bắc bộ liên kết với một số trường khác như trường Vùng cao Việt Bắc, ... đã thành truyền thống và ngày càng đi vào nề nếp. Đó là khối các trường THPT Chuyên Hùng Vương (Phú Thọ), THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ (Hòa Bình), THPT Chuyên tỉnh Vĩnh Phúc, THPT Chuyên tỉnh Bắc Giang, THPT Chuyên Chu Văn An (Lạng Sơn), THPT Chuyên Thái Nguyên, THPT Chuyên Tuyên Quang, THPT Chuyên Hà Giang, THPT Chuyên Lai Châu, THPT Chuyên Điện Biên, THPT Chuyên Bắc Kạn, THPT Chuyên Bắc Giang, THPT Chuyên Hạ Long (Quảng Ninh), THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành (Yên Bái) và Trường Vùng cao Việt Bắc.

Trại hè Hùng Vương hoạt động tuân thủ theo Bản điều lệ của Trại hè, nhờ đó, các đơn vị chủ động xây dựng chương trình hành động và cách thức triển khai. Là một nội dung hoạt động toàn diện của trường THPT Chuyên trên cơ sở hoàn toàn tự nguyện tham gia của các trường THPT Chuyên khu vực miền núi - trung du phía Bắc. Thông qua hoạt động của trại hè phát triển tư duy môn học cho những học sinh có năng khiếu bộ môn văn hóa theo chương trình lớp 10 THPT Chuyên của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Đặc biệt trại hè hướng tới việc định hướng và rèn luyện cho học sinh kỹ năng sống, kỹ năng giao tiếp xã hội, gắn lý thuyết với thực tiễn xã hội ở địa phương và đất nước. Từ đó tăng cường chất lượng giáo dục văn hóa, thể chất, hiểu biết xã hội qua những hoạt động ngoài nhà trường góp phần nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện cho học sinh. Gắn với các hoạt động trên là việc bồi dưỡng chuyên môn nghiệp vụ và năng lực tổ chức các hoạt động xã hội cho giáo viên đang giảng dạy ở các trường THPT Chuyên.

Các semina bộ môn góp phần giúp giáo viên và học sinh được tiếp cận với những đơn vị kiến thức mới của bộ môn góp phần nâng cao chất lượng đào tạo học sinh giỏi bộ môn của các trường tham gia trại hè.

Ban tổ chức trại hè đã xây dựng nội dung, chương trình kế hoạch cho các kỳ trại hè; liên hệ mời các giáo sư cố vấn khoa học; tổ chức và chủ trì các hội nghị

trù bị và trại hè chính thức.

Sản phẩm của trại hè: Mỗi bộ môn xây dựng một tập san (kỷ yếu) trong đó lưu giữ các nội dung gồm các báo cáo khoa học bộ môn, các đề thi Olympic bộ môn, các đề đề xuất của các trường kèm theo lời giải và một số bài làm có chất lượng tốt của học sinh.

Trại hè Hùng Vương là hoạt động giao lưu giữa các trường THPT chuyên khu vực Trung du - Miền núi phía bắc và trường Phổ thông Vùng cao Việt Bắc, trên cơ sở hoàn toàn tự nguyện tham gia, nhằm bồi dưỡng và phát triển năng khiếu cho học sinh về môn chuyên cho một số học sinh đạt kết quả xuất sắc của các trường chuyên, tăng cường sự hiểu biết về văn hoá xã hội vùng miền cho học sinh qua các hoạt động của trại hè, góp phần nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện cho học sinh; rèn luyện cho học sinh kỹ năng sống, kỹ năng giao tiếp xã hội, gắn lý thuyết với thực tiễn xã hội ở địa phương và đất nước.

Trại hè Hùng Vương với mục tiêu bồi dưỡng và nâng cao năng lực tổ chức các hoạt động xã hội cho giáo viên đang giảng dạy ở các trường THPT Chuyên, là nơi để trao đổi chuyên môn, kinh nghiệm và các nguồn lực khác giữa các trường nhằm nâng cao chất lượng bồi dưỡng học sinh giỏi và hoạt động giáo dục toàn diện của các trường chuyên tham gia trại hè.

Ngoài phần hoạt động chuyên môn, Trại hè Hùng Vương còn tổ chức giao lưu văn hóa, văn nghệ, thăm quan học tập đối với học sinh và giáo viên các trường tham gia trại hè, thi Olympic các môn học cho học sinh.

Năm nay Trại hè Hùng Vương được tổ chức tại trường THPT Chuyên Cao Bằng từ ngày 01.08 đến 04.08. Nhằm bồi dưỡng và trao đổi chuyên môn, chúng tôi giới thiệu một số tư liệu phục vụ trại hè này do các giáo viên và Ban chuyên môn biên soạn, nhằm tổ chức tốt các semina giữa các giáo viên tham gia trại hè, trao đổi tài liệu và các kinh nghiệm trong công tác giảng dạy.

Vì thời gian rất gấp gáp, nên các khâu chế bản và nội dung chắc chắn còn nhiều khiếm khuyết. Mong nhận được sự góp ý của các thầy, cô và các em học sinh

Trưởng ban cố vấn khoa học
GS TSKH Nguyễn Văn Mậu

Phương pháp lượng giác và áp dụng

Đào Văn Lương, Trường THPT Chuyên Lào Cai

Tóm tắt nội dung

Lượng giác là phần kiến thức quan trọng trong chương trình toán THPT, ngoài những bài toán liên quan trực tiếp đến lượng giác, như biến đổi lượng giác, hệ thức lượng giác trong tam giác, tứ giác, phương trình lượng giác, tích phân của các hàm số lượng giác,..., thì một lượng không nhỏ các bài toán lại được chuyển về làm việc với đối tượng là lượng giác thông qua các phép đặt lượng giác. Trong bài viết này ta sẽ áp dụng phương pháp lượng giác vào giải quyết một số dạng toán cơ bản là các bài toán về phương trình, hệ phương trình, các bài toán chứng minh bất đẳng thức và một số bài toán liên quan đến dãy số.

1 Các kết quả cơ bản

1.1 Một số đẳng thức lượng giác

- 1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- 2) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- 3) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \forall x \neq k\pi$
- 4) $\cot x + \frac{1}{\sin x} = \cot \frac{x}{2}, \forall x \neq k\pi$
- 5) Với $\alpha; \beta; \gamma \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma \iff \alpha + \beta + \gamma = n\pi (n \in \mathbb{Z})$$

- 6) Với $\alpha; \beta; \gamma \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta + \tan \beta \cdot \tan \gamma + \tan \gamma \cdot \tan \alpha = 1 \iff \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + n\pi (n \in \mathbb{Z})$$

1.2 Một số phép đặt lượng giác

- 7) Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì, đặt $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$

8) Nếu $x^2 + y^2 = a^2$ thì, đặt $\begin{cases} x = a \sin t \\ y = a \cos t \end{cases}$

9) Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì, đặt $\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ z = \sin \varphi \cdot \sin \theta \end{cases}$

10) Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ thì, đặt $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ z = a \sin \varphi \cdot \sin \theta \end{cases}$

11) Trong mọi trường hợp ta đều có thể lượng giác hóa theo hàm $\tan x$ hoặc $\cot x$

2 Áp dụng trong giải phương trình, hệ phương trình

Ví dụ 2.1. Giải phương trình: $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$

Giải. Điều kiện: $0 < x \leq 2$.

Đặt $x = 2 \cdot \cos t$, điều kiện: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} (*)$. Khi đó phương trình trở thành:

$$2 \cos t = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2(1 + \cos t)}}}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos t = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 - \cos \frac{t}{2})}}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos t = \sqrt{2 + 2 \sin \frac{t}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos t = \sqrt{2}(\sin \frac{t}{8} + \cos \frac{t}{8})$$

$$\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{8})(**)$$

Giải phương trình $(**)$ và kết hợp với điều kiện $(*)$, ta nhận được 2 giá trị của t thỏa mãn là: $t_1 = \frac{2\pi}{9}; t_2 = -\frac{2\pi}{7}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x = 2 \cos \frac{2\pi}{9}$ và $x = 2 \cos \frac{2\pi}{7}$.

Ví dụ 2.2. Cho $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = y(4 - y) \\ y = z(4 - z) \\ z = x(4 - x) \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị mà tổng $S = x + y + z$ có thể nhận được.

Giải.

Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Cộng vế với vế tương ứng các phương trình của hệ, ta nhận được:

$3S = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0 \Rightarrow S \geq 0$. Vì $S \geq 0$ nên trong 3 số x, y, z phải có ít nhất một

số không âm, không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \geq 0$, từ phương trình (1) của hệ ta suy ra $0 \leq x \leq 4$. Bằng phép hoán vị vòng quanh ta có: $0 \leq x, y, z \leq 4$. Đặt $x = 4 \sin^2 \alpha$, với $0 \leq \alpha \leq \pi$. Khi đó từ PT(3) suy ra: $z = 4 \sin^2 2\alpha$, thay vào PT(2), suy ra: $y = 4 \sin^2 4\alpha$, thay trở lại phương trình đầu, ta nhận được $x = 4 \sin^2 8\alpha$.

Như vậy α là nghiệm của phương trình: $\sin^2 8\alpha = \sin^2 \alpha \iff \cos 16\alpha = \cos 2\alpha$

$$\iff \alpha = \frac{k\pi}{7}; \alpha = \frac{k\pi}{9} (k \in \mathbb{Z})$$

Trường hợp 1: $\alpha = \frac{k\pi}{7}$ vì $0 \leq \alpha \leq \pi$, nên $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, tuy nhiên với $k \in \{4; 5; 6; 7\}$ hay $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ đều cho cùng một giá trị của x, y, z .

*) Với $k = 0 \implies \alpha = 0 \implies S = 0$

*) Với $k \in \{1; 2; 3\}$ thì S có cùng một giá trị bằng: $S = 4 \sin^2 \frac{\pi}{7} + 4 \sin^2 \frac{2\pi}{7} + 4 \sin^2 \frac{3\pi}{7} = 7$

Trường hợp 2: $\alpha = \frac{k\pi}{9}$ vì $0 \leq \alpha \leq \pi$, nên $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

*) Với $k = 0 \implies \alpha = 0 \implies S = 0$.

*) Với $k \in \{1; 2; 4\}$ thì S có cùng một giá trị bằng: $S = 4 \sin^2 \frac{\pi}{9} + 4 \sin^2 \frac{2\pi}{9} + 4 \sin^2 \frac{4\pi}{9} = 6$.

*) Với $k = 3$ thì $S = 4 \sin^2 \frac{\pi}{3} + 4 \sin^2 \frac{2\pi}{3} + 4 \sin^2 \frac{4\pi}{3} = 9$.

Kết luận: $S \in \{0; 6; 7; 9\}$.

Ví dụ 2.3. Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x^6 + y^6 + z^6 - 6(x^4 + y^4 + z^4) + 10(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x^3y + y^3z + z^3x) + 6(xy + yz + zx) = 0$$

Giải. Biến đổi về trái thành: $P = (x^3 - 3x - y)^2 + (y^3 - 3y - z)^2 + (z^3 - 3z - x)^2$

$$\text{Do đó } P = 0 \iff \begin{cases} y = x^3 - 3x \\ x = z^3 - 3z(*) \\ z = y^3 - 3y \end{cases}$$

) Nếu $x > 2$ thì $y = x(x^2 - 3) > 2 \implies z = y(y^2 - 3) > 2$. Từ đó cộng theo về ba phương trình của hệ () ta có:

$$0 = x^3 + y^3 + z^3 - 4x - 4y - 4z = x(x^2 - 4) + y(y^2 - 4) + z(z^2 - 4) > 0 \text{ (Vô lý).}$$

*) Lập luận hoàn toàn tương tự với $x < -2$, ta cũng có mâu thuẫn. Vậy $|x| \leq 2$

$$\text{Đặt } x = 2 \cos t, 0 \leq t \leq \pi, \text{ suy ra: } \begin{cases} y = 2(4 \cos^3 t - 3 \cos t) = 2 \cos 3t \\ x = 2(4 \cos^3 3t - 3 \cos 3t) = 2 \cos 9t \\ z = 2(4 \cos^3 9t - 3 \cos 9t) = 2 \cos 27t \end{cases}$$

$$\text{Đến đây, } \cos t = \cos 27t \iff t = \frac{k\pi}{13} (k = 0, 1, 2, \dots, 13); t = \frac{l\pi}{14} (l = 0, 1, 2, \dots, 14)$$

Ngược lại, dễ dàng kiểm tra được rằng, nếu $\cos t = \cos 27t$ thì bộ

$(x; y; z) = (2 \cos t; 2 \cos 3t; 2 \cos 9t)$, thỏa mãn hệ (*). Thành thử các bộ $(x; y; z)$

thỏa mãn đề bài là: $(2 \cos t; 2 \cos 3t; 2 \cos 9t)$, với $t = \frac{k\pi}{13} (k = 0, 1, 2, \dots, 13)$ hoặc

$$t = \frac{l\pi}{14} (l = 0, 1, 2, \dots, 14).$$

3 Áp dụng trong chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 3.1. Xét các số thực dương a, b, c , thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1} \leq \frac{10}{3}$$

Giải. Đặt $P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}$

Ta có $abc + a + c = b \iff a + c = b(1 - ac)$

Nếu $ac = 1$ thì $a + c = 0$ (vô lý), do $a, b > 0$. Vậy $ac \neq 1$ Viết lại điều kiện đã cho

dưới dạng: $b = \frac{a + c}{1 - ac}$, điều này gợi ý cho ta đến phép đặt:
$$\begin{cases} a = \tan A \\ b = \tan B \\ c = \tan C \end{cases}$$

Do $a, b, c > 0$, nên tồn tại $A, B, C \in (0; \frac{\pi}{2})$, thỏa mãn $\tan B = \frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \cdot \tan C}$

Từ đây ta nhận được mối liên hệ giữa A, B, C là: $A + B + C = \pi$. Khi đó ta biến đổi

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot \cos^2 A - 2 \cos^2(A + C) + 3 \cdot \cos^2 C = \cos 2A - \cos(2A + 2C) + 3 \cos^2 C \\ &= 2 \sin(2A + C) \cdot \sin C + 3 \cos^2 C \leq 2 \sin C + 3 \cos^2 C = 2 \sin C + 3 - 3 \sin^2 C \\ &= \frac{10}{3} - 3(\sin C - \frac{1}{3})^2 \leq \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\iff \begin{cases} \sin C = \frac{1}{3} \\ \sin(2A + C) = 1 \end{cases}$

Khi đó, $(a; b; c) = (\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{4})$

Ví dụ 3.2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{a}{a + bc} + \frac{b}{b + ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c + ab}$. Với $a, b, c > 0$ và thỏa mãn: $a + b + c = 1$

Giải.

Viết Q dưới dạng: $Q = \frac{1}{1 + \frac{bc}{a}} + \frac{1}{1 + \frac{ca}{b}} + \frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{1 + \frac{c}{ab}}$

Từ giả thiết: $a + b + c = 1 \iff \sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ca}{b}} = 1 (*)$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan \frac{A}{2} \\ \sqrt{\frac{ac}{b}} = \tan \frac{B}{2} \\ \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan \frac{C}{2} \end{cases}; (A, B, C \in (0; \pi))$

Từ (*), ta có: $A + B + C = \pi$. Vậy A, B, C là 3 góc của một tam giác.

Khi đó, $Q = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} = \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{\sin C}{2}$
 $= 1 + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \sin C).$

Mặt khác, ta có: $\cos A + \cos B + \sin C + \sin \frac{\pi}{3} \leq 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} + 2 \cos \frac{C - \frac{\pi}{3}}{2}$
 $\leq 4 \cdot \cos \frac{A+B+C - \frac{\pi}{3}}{4} = 4 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}.$

Suy ra: $Q \leq 1 + \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{A-B}{2} = 1 \\ \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} = 1 \\ \frac{A+B}{2} = \frac{C - \frac{\pi}{3}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 2\sqrt{3} - 3 \\ c = 7 - 4\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy $\max Q = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$, đạt được $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 2\sqrt{3} - 3 \\ c = 7 - 4\sqrt{3} \end{cases}$

Ví dụ 3.3. Các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện

$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1 - 16xyz}{4} (*)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{x + y + z + 4xyz}{1 + 4xy + 4yz + 4zx}$$

Giải. Từ giả thiết suy ra $0 < 2x < 1, 0 < 2y < 1, 0 < 2z < 1$. Đặt $2x = a = \cos A; 2y = b = \cos B; 2z = c, A, B \in (0; \frac{\pi}{2})$. Khi đó, điều kiện (*) trở thành:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + c^2 + 2c \cos A \cos B = 1$$

$$\Leftrightarrow (c + \cos A \cos B)^2 - (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c + \cos A \cos B)^2 - \sin^2 A \sin^2 B = 0$$

$$\Leftrightarrow [c + \cos(A+B)][c + \cos(A-B)] = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -\cos(A+B), \text{ vì } (\cos(A-B) > 0)$$

$\Leftrightarrow c = \cos C$, trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn. Mặt khác

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1, \text{ suy ra } \tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2} \leq \frac{1}{27}.$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \geq 27 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq 27(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow 28(a+b+c+abc) \geq 26(1+ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 28(x+y+z+4xyz) \geq 13(1+4xy+4yz+4zx)$$

Suy ra $S \geq \frac{13}{28}$. Vậy $\min S = \frac{13}{28}$. Đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{4}$

4 Dãy số và giới hạn

Trước hết ta xét ví dụ quen thuộc sau đây.

Ví dụ 4.1. Chứng minh rằng:

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ dấu căn}} + \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ dấu căn}} = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n+1}} \pi$$

Giải.

$$\begin{aligned} & \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n\text{-dấu căn}} + \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n\text{-dấu căn}} = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n+1}} \pi \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n\text{-dấu căn}} + \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n\text{-dấu căn}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} + 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Ta có các kết quả:

$$\begin{aligned} i) & \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n\text{-dấu căn}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \in N^* \\ ii) & \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n\text{-dấu căn}} = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \in N^* \end{aligned}$$

Hai kết quả trên được chứng minh bằng phương pháp qui nạp
Chứng minh (i).

*) Với $n = 1$ thì (i) trở thành: $\sqrt{2} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4}$ (luôn đúng).

) Giả sử (i) đúng với $n = k (k > 1, k \in N^)$, ta có

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{k \text{ dấu căn}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$$

*) Xét

$$\begin{aligned} & \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{k+1 \text{ dấu căn}} = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{k \text{ dấu căn}}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} \\ & = 2 \left| \cos \frac{\pi}{2^{k+2}} \right|, \text{ với } 0 < \frac{\pi}{2^{k+2}} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left| \cos \frac{\pi}{2^{k+2}} \right| = \cos \frac{\pi}{2^{k+2}} \\ & \text{Vậy } \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{k+1 \text{ dấu căn}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}, \text{ ta có (i) đúng với } n = k + 1. \text{ Theo nguyên lý} \end{aligned}$$

qui nạp thì (i) đúng. Chứng minh tương tự ta có (ii). Từ đây ta nhận được đpcm.

Ví dụ 4.2. Cho dãy số x_n thỏa mãn:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{4^n}} \right) \end{cases}$$
 Chứng minh rằng dãy số có giới hạn, tìm giới hạn đó?

Giải. Ta có: $x_1 = \frac{1}{2} = \frac{\cot \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{2^2}$, suy ra $x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{2^2} \cot \frac{\pi}{2^3}$

Dự đoán, số hạng tổng quát $x_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\pi}{2^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*(*)$. Ta dễ dàng kiểm tra lại khẳng định (*) bằng phương pháp qui nạp toán học. Vậy $x_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Do đó $\lim x_n = \lim \frac{1}{2^n} \cot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi} \lim \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi}$

Ví dụ 4.3. Cho dãy số x_n , được xác định bởi:
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{2x_n}{x_n + 1}}, n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tìm $\lim \prod_{i=1}^n x_i$.

Giải. Ta có: $x_1 = \sqrt{2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^2}}$; $x_2 = \sqrt{\frac{2x_1}{x_1 + 1}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^3}}$.

Bằng qui nạp ta chứng minh được: $x_k = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{k+1}}}$. Từ đó, $\prod_{i=1}^n x_i = 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Suy ra: $\lim \prod_{i=1}^n x_i = \frac{\pi}{2}$.

Nhận xét 4.1. Qua các ví dụ trên ta thấy, việc đưa ra công thức số hạng tổng quát của dãy số, hoàn toàn phụ thuộc vào việc biến đổi và đánh dấu (coi) số hạng ban đầu x_1 là giá trị lượng giác của một góc đặc biệt, sau đó dựa vào các phép biến đổi lượng giác, ta dự đoán được qui luật xác định của số hạng tổng quát, cuối cùng là chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp qui nạp, các bài toán về giới hạn của dãy cũng từ đó được giải quyết. Ở một số bài toán việc chỉ ra các liên hệ là không hề đơn giản, ta xét tiếp các ví dụ sau.

Ví dụ 4.4. Cho dãy số (x_n) được xác định:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_{n+1} = \frac{x_n + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2)x_n}; n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $x_{12n+2} = 1$

Giải. Ta có: $\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$.

Viết lại x_{n+1} , dưới dạng: $x_{n+1} = \frac{x_n + \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan \frac{\pi}{12} x_n}$. Lại có $x_1 = \tan \frac{\pi}{6}$, suy ra: $x_2 =$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) \text{ và } x_3 = \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} + 2\frac{\pi}{12}\right)$$

Dự đoán: $x_n = \tan\left[\frac{\pi}{6} + (n-1)\frac{\pi}{12}\right]$. Kết quả này được chứng minh bằng qui nạp toán học. Vậy, ta có số hạng tổng quát: $x_n = \tan\left[\frac{\pi}{6} + (n-1)\frac{\pi}{12}\right]$.
 Khi đó: $x_{12n+2} = \tan\left(\frac{\pi}{6} + (12n+1)\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} + n\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ (đpcm)

Ví dụ 4.5. Cho hai dãy số dương $(x_n); (y_n), n = 1, 2, \dots$, được xác định:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1}, n = 1, 2, 3, \dots \\ y_{n+1} = \frac{y_n}{-4x_{n+1}^2 + 1} \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy (x_n) và (y_n) ?

Giải. Trước hết ta chứng minh bằng qui nạp rằng: $x_n^2 + y_n^2 = 1(1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Thật vậy:

Với $n = 1$ thì $x_1^2 + y_1^2 = 1$, hệ thức (1) đúng. Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là $x_k^2 + y_k^2 = 1$. Ta đi chứng minh (1), còn đúng với $n = k + 1$.

$$\text{Ta có: } 1 = x_k^2 + y_k^2 = [x_{k+1}(4y_{k+1}^2 - 1)]^2 + [y_{k+1}(4x_{k+1}^2 - 1)]^2$$

$$\iff x_{k+1}^2(16y_{k+1}^4 - 8y_{k+1}^2 + 1) + y_{k+1}^2(16x_{k+1}^4 - 8x_{k+1}^2 + 1) - 1 = 0$$

$$\iff (x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 - 1) + (16x_{k+1}^2y_{k+1}^4 - 16x_{k+1}^2y_{k+1}^2 + 16x_{k+1}^4y_{k+1}^2) = 0$$

$$\iff (x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 - 1)(16x_{k+1}^2y_{k+1}^2 + 1) = 0$$

$$\iff x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = 1. \text{ Vậy (1) đúng với } n = k + 1. \text{ Vậy } x_n^2 + y_n^2 = 1(1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $x_n = \sin \alpha_n; y_n = \cos \alpha_n$, từ hệ thức truy hồi $y_{n+1} = \frac{y_n}{-4x_{n+1}^2 + 1}$, ta có:

$$\cos \alpha_{n+1} = \frac{\cos \alpha_n}{-4 \sin^2 \alpha_{n+1} + 1}$$

$$\implies \cos \alpha_{n+1}(1 - 4 \sin^2 \alpha_{n+1}) = \cos \alpha_n$$

$$\iff \cos \alpha_{n+1}(4 \cos^2 \alpha_{n+1} - 3) = \cos \alpha_n$$

$$\iff \cos 3\alpha_{n+1} = \cos \alpha_n \implies 3\alpha_{n+1} = \alpha_n, \text{ do } \alpha_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Từ đây, suy ra: } \alpha_n = \frac{\alpha_1}{3^{n-1}}, \text{ mặt khác } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \sin \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\implies \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \implies \alpha_n = \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}}. \text{ Vậy } x_n = \sin \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}}; y_n = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}}$$

$$\text{Suy ra: } \lim x_n = \lim \sin \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}} = \sin(\lim \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}}) = 0$$

$$\lim y_n = \lim \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}} = \cos(\lim \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}}) = 1$$

BÀI TẬP

Bài toán 4.1. Giải phương trình:

a) $4x^3 + 2\sqrt{1-x^2} - 3x - 1 = 0$

b) $x + \frac{3x}{\sqrt{25x^2 - 9}} = \frac{7}{4}$

Bài toán 4.2. Giải các hệ phương trình:

$$\begin{aligned} a) & \begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases} \\ b) & \begin{cases} x^3 - 3x = y(3x^2 - 1) \\ y^3 - 3y = z(3y^2 - 1) \\ z^3 - 3z = x(3z^2 - 1) \end{cases} \\ c) & \begin{cases} 3(x + \frac{1}{x}) = 4(y + \frac{1}{y}) = 5(z + \frac{1}{z}) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài toán 4.3. Tìm nghiệm x, y, z, t của hệ:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z^2 + t^2 = 16 \\ xt + yz \geq 12 \end{cases}$$
 sao cho biểu thức

$A = x + z$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 4.4. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}} + \sqrt{\frac{yz}{x+yz}} + \sqrt{\frac{zx}{y+zx}} \leq \frac{3}{2}$$

Bài toán 4.5. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$2xy + yz + zx \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

Bài toán 4.6. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, thỏa mãn: $x^2y^2 + 2yx^2 + 1 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$f(x, y) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + y(y + \frac{1}{x} + 2)$$

Bài toán 4.7. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của a_n

Bài toán 4.8. Cho dãy:
$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của a_n

Bài toán 4.9. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \end{cases}$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n a_i$

Tài liệu

- [1] Nguyễn Văn Mậu, *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo dục 2008.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, *Chuyên đề chọn lọc dãy số và áp dụng*, NXB Giáo dục 2008.
- [3] Kỷ yếu hội nghị khoa học các chuyên đề toán học trong hệ THPT chuyên 2005.
- [4] Kỷ yếu toán học trại hè Hùng Vương.
- [5] Các website toán học <http://www.mathscope.org>, <http://www.mathlinks.ro>
- [6] Tạp trí toán học và tuổi trẻ.

Hệ phương trình không mẫu mực

Nguyễn Việt Hà, Trường THPT Chuyên Lào Cai

1 Giới thiệu

Trong bài viết này, tôi xin được trao đổi về một số dạng hệ phương trình hoán vị, đối xứng thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi.

2 Hệ hoán vị

Trong một tài liệu về hệ phương trình của thầy Phạm Kim Chung (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An) đã nói rất kĩ về hệ hoán vị vòng quanh. Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ xác định trong miền D , xét hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \vdots \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

Ta có định lý sau:

Định lý 2.1. Nếu hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cùng đồng biến trong miền D và $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ là một nghiệm của hệ đã cho thì $x_1; x_2 = \dots = x_n$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = \min\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$. Khi đó, $x_1 \leq x_2$. Do $f(x)$ đồng biến nên $f(x_1) \leq f(x_2)$, hay $g(x_2) \leq g(x_3)$. Tương tự như vậy ta có $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_1$. Do đó $x_1; x_2 = \dots = x_n$.

Ta xét một ví dụ

Bài toán 2.1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 11x^2 + 41x + 30 = y \\ y^3 + 11y^2 + 41y + 30 = z \\ z^3 + 11z^2 + 41z + 30 = x \end{cases}$$

Giải. Xét hàm $f(x) = x^3 + 11x^2 + 41x + 30$ và hàm $g(x) = x$, đây là hai hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên nếu hệ trên có nghiệm thì $x = y = z$.

Xét phương trình $x^3 + 11x^2 + 41x + 30 = x$ có nghiệm duy nhất $x = -1$. Do đó hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(-1; -1; -1)$.

Trên đây là ví dụ mà hai hàm đang xét đồng biến trên cả tập xác định. Tuy nhiên cũng có những trường hợp ta phải để ý một chút, giới hạn lại miền giá trị thì hàm đang xét mới đồng biến.

Bài toán 2.2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases}$$

Giải. Hệ trên được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} y^3 = 9x^2 - 27x + 27 \\ z^3 = 9y^2 - 27y + 27 \\ x^3 = 9z^2 - 27z + 27 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = 9t^2 - 27t + 27$. Ta có: $f(t) \geq \frac{27}{4}$ (Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{3}{2}$). Do đó $y^3 \geq \frac{27}{4}$, suy ra $y > \frac{3}{2}$. Tương tự, ta suy ra $x, y, z > \frac{3}{2}$.

Do đó, ta chỉ xét với $t > \frac{3}{2}$ thì cả hai hàm số $f(t) = 9t^2 - 27t + 27, g(t) = t^3$ đều là các hàm số đồng biến. Làm tương tự như bài toán 1, ta có nghiệm của hệ đã cho là $(3; 3; 3)$.

Hay một ví dụ khác mà việc đánh giá không còn đơn giản như bài toán trên nữa.

Bài toán 2.3 (Nguyễn Anh Hoàng-Nguyễn Đức Tấn: Phương trình và hơn thế nữa). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

Giải. Cộng ba phương trình ta có:

$$(x - 2)^3 + (y - 2)^3 + (z - 2)^3 = 0$$

Nếu $x > 2$ thì từ phương trình đầu của hệ ta có $y^3 = 6x(x - 2) + 8 > 8$, do đó $y > 2$. Làm tương tự cho phương trình thứ hai ta thu được $z > 2$. Vậy ta thu được $x > 2, y > 2, z > 2$ do đó

$$(x - 2)^3 + (y - 2)^3 + (z - 2)^3 > 0,$$

vô lý. Do đó, $x \leq 2$. Tương tự $y \leq 2, z \leq 2$. Do đó

$$(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 \leq 0,$$

và dấu bằng phải xảy ra, hay $x = y = z = 2$ là nghiệm duy nhất của hệ đã cho.

Bây giờ ta xét một số hệ hoán vị khác.

Bài toán 2.4. Tìm tất cả các nghiệm thực không âm của hệ sau

$$\begin{cases} x_2^2 + x_1x_2 + x_1^4 = 1 \\ x_3^2 + x_2x_3 + x_2^4 = 1 \\ x_4^2 + x_3x_4 + x_3^4 = 1 \\ \dots \\ x_{1999}^2 + x_{1998}x_{1999} + x_{1998}^4 = 1 \\ x_1^2 + x_{1999}x_1 + x_1^4 = 1 \end{cases}$$

Giải. Đặt $k = \sqrt{\sqrt{2}-1}$. Khi đó k thỏa mãn $k^4 + 2k^2 = 1$, do vậy $x_i = k$ là một nghiệm.

Giả sử $x_1 < k$, từ phương trình đầu tiên của hệ suy ra $x_2 > k$. Tương tự, từ phương trình tiếp theo ta thu được $x_3 < k$ và cứ tiếp tục như vậy ta lại thu được $x_1 < k$, mâu thuẫn.

Tương tự, nếu $x_1 < k$ ta cũng đi tới mâu thuẫn. Do đó, $x_1 = k$. Tương tự cho các ẩn còn lại, ta thu được nghiệm duy nhất của hệ là $(x_1; x_2; \dots; x_{1999}) = (k; k; \dots; k)$

Bài toán 2.5. Tìm tất cả các nghiệm thực của hệ

$$\begin{cases} x = \frac{4z^2}{1+4z^2} \\ y = \frac{4x^2}{1+4x^2} \\ z = \frac{4y^2}{1+4y^2} \end{cases}$$

Giải. Từ hệ đã cho ta suy ra $0 \leq x, y, z < 1$. Viết lại hệ trên dưới dạng

$$\begin{cases} 4z^2 = \frac{x}{1-x} \\ 4x^2 = \frac{y}{1-y} \\ 4y^2 = \frac{z}{1-z} \end{cases}$$

Nhân các phương trình lại ta thu được $(xyz)^2(1-x)(1-y)(1-z) = \frac{xyz}{64}$. Nếu một trong ba số x, y, z bằng 0, không mất tính tổng quát ta giả sử $x = 0$ thì từ phương trình đầu tiên của hệ, ta thu được $z = 0$ và do vậy $y = 0$. Do đó $(0; 0; 0)$ là một nghiệm.

Trong trường hợp $xyz \neq 0$, từ $(xyz)^2(1-x)(1-y)(1-z) = \frac{xyz}{64}$ ta thu được $x(1-x)$

$$x)y(1-y)z(1-z) = \frac{1}{64}.$$

Nhưng $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ (dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$). Làm tương tự cho y, z , ta thu được nghiệm còn lại của hệ là $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $x = y = z = 0$ và $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Bài toán 2.6. Tìm tất cả các nghiệm (x, y, z) với $x > 0, y > 0, z > 0$ của hệ

$$\begin{cases} x^y = z \\ y^z = x \\ z^x = y \end{cases}$$

Giải. Nếu $x > 1$ thì $z = x^y > 1$ và $y = z^x > 1$. Do đó $z = x^y > x, x = y^z > y$, và $y = z^x > z$, mâu thuẫn.

Tương tự, nếu $x < 1$, thì $y < 1$ và $z < 1$. Vậy, $z = x^y > x, x = y^z > y$, và $y = z^x > z$, mâu thuẫn.

Nếu $x = 1$ thì $z = z^y = 1$ và $y = z^x = 1$.

Do đó, hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(1; 1; 1)$.

3 Hệ đối xứng

Trong mục này, chúng ta xem xét một số hệ đối xứng.

Bài toán 3.1. Tìm tất cả các nghiệm thực dương của hệ

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 = xyz \end{cases}$$

Giải. Ta có $xyz = x^2 + y^2 + z^2 > y^2 + z^2 \geq 2yz$. Do đó $x > 2$ và $x^3 > x$. Tương tự, $y^3 > y$ và $z^3 > z$, vô lý. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Bài toán 3.2. Tìm nghiệm thực (x, y, z) của hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 3 \end{cases}$$

sao cho giá trị lớn nhất của z .

Giải. Ta có

$$25 = (x + y + z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) = (x^2 + y^2 + z^2) + 6.$$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 = 19$. Do đó

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - 2\frac{(x + y + z)}{3} + \frac{1}{3} = 19 - \frac{10}{3} + \frac{1}{3} = 16.$$

Vậy giá trị lớn nhất có thể của z là $4\frac{1}{3}$ (với nghiệm tương ứng là $x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{3}; z = 4\frac{1}{3}$)

Bài toán 3.3. Tìm tất cả các nghiệm thực của hệ

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4 \\ x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_2 + x_4x_1 = 0 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -2 \\ x_1x_2x_3x_4 = -1 \end{cases}$$

Giải. Phương trình thứ hai của hệ tương đương $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0$. Giả sử $x_1 = -x_2 = a$. Khi đó các phương trình khác là $x_3^2 + x_4^2 = 4 - 2a^2, x_3 + x_4 = \frac{2}{a^2}; x_3x_4 = \frac{1}{a^2}$.

Do đó, $\frac{4}{a^2} = (x_3 + x_4)^2 = 4 - 2a^2 + \frac{2}{a^2}$, vậy

$$(a^2 - 2)(a^2 + 1)(a^2 - 1) = 0.$$

Nếu $a = \pm 1$ thì $x_3 + x_4 = 2, x_3x_4 = 1$, vậy $x_3 = x_4 = 1$. Nếu $a^2 = 2$ thì $x_3 + x_4 = 1, x_3x_4 = \frac{1}{2}$ và x_3, x_4 không phải số thực.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(1; 1; 1; -1)$ và các hoán vị.

Bài toán 3.4. Tìm tất cả các nghiệm dương của hệ

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ y + z^2 + x^3 = 3 \\ z + x^2 + y^3 = 3 \end{cases}$$

Giải. Nếu $x, y \geq 1$ thì $x + y^2 \leq x^2 + y^3$ (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$). Nhưng $z^3 = 3 - (x + y^2) \geq 3 - (x^2 + y^3) = z$, vậy $z \geq 1$. Từ đó, cả ba số $x, y, z \geq 1$ nên $x = y = z = 1$. Tương tự, nếu $x, y \leq 1$, khi đó $z \leq 1$, và do đó $(x; y; z) = (1; 1; 1)$. Vậy nếu $(x; y; z) \neq (1; 1; 1)$ thì trong hai số x, y thì một số lớn hơn 1 và một số nhỏ hơn 1. Nhưng bằng lập luận tương tự ta có thể chỉ ra rằng trong hai số y, z thì một số lớn hơn 1 và một số nhỏ hơn 1, trong hai số z, x thì một số lớn hơn 1 và một số nhỏ hơn 1, mâu thuẫn. Vậy hệ đã cho chỉ có duy nhất một nghiệm dương $(1; 1; 1)$.

Bài toán 3.5. Tìm tất cả các nghiệm dương của hệ

$$\begin{cases} w + x + y + z = 12 \\ wxyz = wx + wy + wz + xy + xz + yz + 27 \end{cases}$$

Giải. Đặt $p = \sqrt{wxyz}$. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho wx, wy, wz, xy, xz, yz ta có

$$p \leq \frac{(wx + wy + wz + xy + xz + yz)}{6} = \frac{p^2}{6} - \frac{27}{6}$$

, vậy $(p - 3)^2 \geq 36$. Do đó $\|p - 3\| \geq 6$ nhưng p dương nên $p \geq 9$. Do vậy $wxyz \geq 81$. Nhưng áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho w, x, y, z ta có $\sqrt{p} \leq 3$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $w = x = y = z$. Vậy $wxyz \leq 81$

Từ đó, $wxyz = 81$, và do đó $w = x = y = z = 3$.

4 Bài tập rèn luyện

Bài toán 4.1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

Bài toán 4.2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 - 2y = -\frac{1}{2} \\ y^4 - 2z = -\frac{1}{2} \\ z^4 - 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài toán 4.3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_2 \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_3 \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_4 \\ x_4 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_1 \end{cases}$$

Bài toán 4.4. Tìm tất cả các nghiệm dương của hệ bất phương trình $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0)$

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0 \end{cases}$$

Bài toán 4.5. Chứng minh hệ phương trình sau có đúng một nghiệm thực dương:

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ xyz - x - y - z = 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại nghiệm thực của hệ trên mà x, y, z phân biệt.

Bài toán 4.6. Tìm tất cả các số thực x, y thỏa mãn

$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1+x^7 \end{cases}$$

Tài liệu

- [1] Nguyễn Văn Mậu, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*. NXBGD, 1993.
- [2] Phạm Kim Chung, *Hệ phương trình bồi dưỡng HSG*. Nghệ An, 2007.
- [3] Lê Văn Đính, *Tiểu luận của sinh viên khoa Toán*, DHSPHN, 2010.
- [4] Nguyễn Anh Hoàng-Nguyễn Đức Tấn, *Hệ phương trình không mẫu mực*. (Phương trình và hơn thế nữa) Kỹ yếu bồi dưỡng giáo viên, HCM-Hè 2010, pp. 13-18;

Chứng minh bất đẳng thức theo phương pháp suy luận

Nguyễn Văn Xã, Trường THPT Chuyên Cao Bằng

Trong các kì thi học sinh giỏi Toán quốc gia, Olympic Toán các khu vực trong nước cũng như quốc tế ta thường thấy xuất hiện các bài toán về chứng minh bất đẳng thức. Có những bất đẳng thức để chứng minh được ta phải sử dụng các bất đẳng thức AM-GM, Cauchy-Schwarz, Holder, Cheuyshev, Schur, Jensen, sử dụng đạo hàm vv... ở mức độ phức tạp. Tuy nhiên có một lớp các bài toán việc suy luận trong khi chứng minh lại đóng vai trò chủ chốt, còn các bất đẳng thức kể trên hay đạo hàm chỉ đóng vai trò hỗ trợ ở mức độ đơn giản. Lớp các bất đẳng thức được chứng minh theo cách này tôi xin được gọi là các bất đẳng thức được chứng minh bằng phương pháp suy luận.

1 Một số dạng bất đẳng thức sắp thứ tự

Bài toán 1.1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a \geq b \geq c$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - a^2}{b} \geq 3a - 4b + c.$$

Lời giải. Do $a \geq b \geq c$ nên $\frac{a+b}{c} \geq 2$, $\frac{c+b}{a} \leq 2$, $\frac{a+c}{b} \geq 1$.

Từ đó suy ra

$$\frac{a^2 - b^2}{c} \geq 2(a - b), \quad \frac{c^2 - b^2}{a} \geq 2(c - b), \quad \frac{a^2 - c^2}{c} \geq a - c.$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - a^2}{b} \geq 3a - 4b + c.$$

Đây là điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Bài toán 1.2. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \leq 1, \quad \frac{4}{z} + y \leq 2.$$

Chứng minh rằng $x + 9y + z \geq 26$.

Lời giải. Do $x, y, z > 0$ nên có $1 \geq \frac{2}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{y} \Rightarrow y > 1$

$$2 \geq \frac{4}{z} + y > y \Rightarrow y < 2$$

Từ đó suy ra $y \in (1; 2)$

$$\text{Ta có } \frac{2}{x} \leq 1 - \frac{1}{y} = \frac{y-1}{y} \Rightarrow x \geq \frac{2y}{y-1} = 2 + \frac{2}{y-1}$$

$$\frac{4}{z} \leq 2 - y \Rightarrow z \geq \frac{4}{2-y}$$

Do đó, Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned} x + 9y + z &\geq \frac{2}{y-1} + \frac{4}{2-y} + 9y + 2 \\ &= 2\left[\frac{1}{y-1} + 9(y-1)\right] + \left[\frac{4}{2-y} + 9(2-y)\right] + 2 \geq 2 \cdot 6 + 12 + 2 = 26 \end{aligned}$$

Đây là điều phải chứng minh.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x = \frac{2y}{y-1} \\ z = \frac{4}{2-y} \\ \frac{1}{y-1} = 9(y-1) \\ \frac{4}{2-y} = 9(2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = \frac{4}{3} \\ z = 6 \end{cases}$$

Bài toán 1.3. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$. Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx + 9 \geq 4(x + y + z).$$

Lời giải. Ta có $xyz = x^2 + y^2 + z^2 > 2yz \Rightarrow x > 2$

Tương tự, ta cũng chứng minh được $y \geq 2$ và $z \geq 2$.

Ta có $xy + yz + zx + 9 \geq 4(x + y + z)$

$$\Leftrightarrow (x-2)(y-2) + (y-2)(z-2) + (z-2)(x-2) \geq 3$$

Đặt $a = x - 2$, $b = y - 2$, $c = z - 2$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

Ta được bất đẳng thức $ab + bc + ca \geq 3$.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$

$$\Leftrightarrow (a+2)^2 + (b+2)^2 + (c+2)^2 = (a+2)(b+2)(c+2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 4 = abc + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow abc + ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) + 4 \geq 4.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow t^3 \geq abc$$

$$\text{Từ đó, suy ra } t^3 + 3t^2 \geq 4 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2)^2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$$

$\Rightarrow ab + bc + ca \geq 3$. Đây là điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 3$.

Bài toán 1.4. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x(x+y+z) = 3yz$. Chứng minh rằng

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3.$$

Lời giải. Đặt $a = x + y$, $b = x + z$, $c = y + z$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện } x(x+y+z) = 3yz \text{ trở thành } c^2 - a^2 + b^2 - ab &= (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 = \\ &= \frac{1}{4}(a+b)^2 \\ \Rightarrow a+b &\geq 2c \end{aligned} \quad (1)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3abc &\leq 5c^3 \Leftrightarrow (a+b)(a^2 + b^2 - ab) + 3abc \leq 5c^3 \\ \Leftrightarrow (a+b)c^2 + 3ab &\leq 5c^2 \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) cho ta: } (a+b)c \leq 2c^2 \text{ và } 3ab \leq \frac{3}{4}(a+b)^2 \leq 3c^2.$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z$.

Bài toán 1.5. Cho $0 \leq x \leq y \leq 1$ và $2x + y \leq 2$.

Chứng minh rằng

$$2x^2 + y^2 \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Lời giải. Do } 2x + y \leq 2 \text{ và } x \geq 0 \text{ nên } 2x^2 + xy \leq 2x. \quad (1)$$

$$\text{Do } y \leq 1 \text{ và } y - x \geq 0 \text{ nên } y(y - x) \leq y - x \Leftrightarrow y^2 - xy \leq y - x. \quad (2)$$

$$\text{Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được } 2x^2 + y^2 \leq x + y. \quad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(x+y)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}x + 1 \cdot y\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} + 1\right)(2x^2 + y^2). \quad (4).$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } (2x^2 + y^2)^2 \leq (x+y)^2 \leq \frac{3}{2}(2x^2 + y^2) \Rightarrow 2x^2 + y^2 \leq \frac{3}{2}.$$

Đây là điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$; $y = 1$.

Bài toán 1.6. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0.$$

Lời giải. Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a, b, c \in [-1; 1] \Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq 0$

$$\Rightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \geq 0. \quad (1)$$

$$\text{Vì } (1+a+b+c)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2(a+b+c+ab+bc+ca) \geq 0$$

$$\Rightarrow 2 + 2(a+b+c+ab+bc+ca) \geq 0 \Rightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca \geq 0. \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được

$$abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0.$$

Đây là điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a = -1; b = c = 0$ và các hoán vị.

Bài toán 1.7. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ và $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng

$$-\frac{4}{3} \leq a, b, c \leq \frac{4}{3}.$$

Lời giải. Coi c là tham số còn a, b là ẩn thì ta có

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 2 - c^2 \\ c(a+b) + ab = 1 \end{cases}$$

Đặt $S = a + b, P = ab$, thì phải có điều kiện $S^2 \geq 4P$. Ta được

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 2 - c^2 \\ cS + P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2cS + c^2 - 4 = 0 \\ P = 1 - cS \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -c \pm 2 \\ P = 1 - cS \end{cases}$$

Trường hợp 1: $P = 1 - cS, S = -c + 2 \Rightarrow P = c^2 - 2c + 1$. Do $S^2 \geq 4P$ nên $(2-c)^2 \geq 4(c^2 - 2c + 1) \Leftrightarrow 4c - 5c^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq \frac{4}{3}$.

Trường hợp 2: $P = 1 - cS, S = -c - 2$. Tương tự trường hợp 1 ta suy ra được $-\frac{4}{3} \leq c \leq 0$.

Như vậy, ta được $-\frac{4}{3} \leq c \leq \frac{4}{3}$.

Do vai trò của a, b, c giống nhau nên $-\frac{4}{3} \leq a, b, c \leq \frac{4}{3}$.

Đây là điều phải chứng minh.

Bài toán 1.8. Cho ba số $x, y, z \in [0; 1]$

Chứng minh rằng

$$2(x^3 + y^3 + z^3 - (x^2y + y^2z + z^2x)) \leq 3.$$

Lời giải. Do $x, y, z \in [0; 1]$ nên ta có $(1-x^2)(1-y) + (1-y^2)(1-z) + (1-z^2)(1-x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow 3 \geq (x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z) - (x^2y + y^2z + z^2x).$ (1)

Vì $x, y, z \in [0; 1] \Rightarrow x \geq x^2 \geq x^3, y \geq y^2 \geq y^3, z \geq z^2 \geq z^3$ nên từ (1) ta có

$$3 \geq (x^3 + y^3 + z^3) + (x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \\ \Rightarrow 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$ hoặc $x = y = 1, z = 0$ và các hoán vị.

Bài toán 1.9. Cho $a, b, c \in (0; 1]$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} < 2.$$

Lời giải. Nhận xét:

Nếu $\frac{x}{y} \leq 1$ ($x > 0, y > 0$) thì $\frac{x}{y} \leq \frac{x+m}{y+m}$, nếu $m > 0$

Nếu $\frac{x}{y} \geq 1$ ($x > 0, y > 0$) thì $\frac{x}{y} \geq \frac{x+m}{y+m}$, nếu $m > 0$,

Do đó, ta có

$$\frac{a}{1+bc} < \frac{a+a}{1+bc+a} = \frac{2a}{1+bc+a} < \frac{2a}{a+b+c}. \quad (1)$$

(Vì $1+bc \geq b+c \Leftrightarrow (1-b)(1-c) \geq 0$)

Tương tự, ta có $\frac{a}{1+ca} < \frac{2b}{a+b+c}$ (2)

và $\frac{c}{1+ab} < \frac{2c}{a+b+c}$. (3)

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} < 2.$$

Đây là điều phải chứng minh.

Lí luận tương tự ta có thể giải được bài toán sau

Bài toán 1.10. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

Lời giải. Ta có $\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$, $\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$, $\frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$

Từ đó, suy ra $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$. (1)

Mặt khác, Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{a}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2a}{a+b+c}.$$

Tương tự, ta có $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}$ và $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$.

Từ đó suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 1.11. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq a + b + c.$$

Lời giải. Vì $a > 0, b > 0$ nên suy ra $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq (a+b)ab$

$$\Rightarrow a^3 - 5b^3 \geq ab(a+b) - 6b^3$$

$$\Rightarrow a^3 - 5b^3 \geq b(a^2 + ab - 6b^2) = b(a+3b)(a-2b)$$

$$\Rightarrow 5b^3 - a^3 \geq b(a+3b)(b-2a)$$

$$\Rightarrow \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a. \quad (1)$$

Dấu bằng xảy ra trong (1) khi $a = b$

Tương tự, ta có

$$\frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} \leq 2c - b \quad (2)$$

$$\text{và } \frac{5a^3 - c^3}{ac + 3a^2} \leq 2a - c. \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq a + b + c.$$

Điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Bài toán 1.12. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Chứng minh rằng

$$\frac{\cos^4 B}{B} + \frac{\cos^4 C}{C} \geq \frac{2}{\pi}.$$

Lời giải. Hiển nhiên ta có bất đẳng thức $(B - \frac{\pi}{4})(\tan^4 B - 1) \geq 0$

$$\Rightarrow (B - \frac{\pi}{4}) \left(\frac{\sin^4 B}{\cos^4 B} - 1 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow (B - \frac{\pi}{4}) (\sin^4 B - \cos^4 B) \geq 0$$

$$\Rightarrow B \sin^4 B + \frac{\pi}{4} \cos^4 B - B \cos^4 B - \frac{\pi}{4} \sin^4 B \geq 0$$

$$\Rightarrow B \sin^4(\frac{\pi}{2} - C) + \frac{\pi}{2} \cos^4 B - \frac{\pi}{4} \cos^4 B - (\frac{\pi}{2} - C) \cos^4 B - \frac{\pi}{4} \sin^4 B \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B\cos^4 C + C\cos^4 B &\geq \frac{\pi}{4}(\cos^4 B + \sin^4 B) \\ \Rightarrow B\cos^4 C + C\cos^4 B &\geq \frac{\pi}{4}(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2B) \geq \frac{\pi}{8} \\ \Rightarrow \frac{\cos^4 B}{B} + \frac{\cos^4 C}{C} &\geq \frac{\pi}{8BC} = \frac{\pi}{2(B+C)^2} \geq \frac{2}{\pi}. \\ \text{Vậy } \frac{\cos^4 B}{B} + \frac{\cos^4 C}{C} &\geq \frac{2}{\pi}. \text{ Điều phải chứng minh} \\ \text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} B = C \\ \sin^2 2B = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow B = C = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Bài toán 1.13. Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Lời giải. Do bất đẳng thức là đối xứng với ba biến a, b, c nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0 \leq a \leq b \leq c < 1$.

Từ đó dễ thấy

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} &\leq \frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{a+b+1} + \frac{c}{a+b+1} = \frac{a+b+c}{a+b+1}. \text{ Bây} \\ \text{giờ ta chỉ cần chứng minh } \frac{a+b+c}{a+b+1} &+ (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \\ \Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c) &\leq \frac{1-c}{a+b+1} \Leftrightarrow (1-a)(1-b)(a+b+1) \leq 1 \end{aligned}$$

Ta có $(1-a)(1-b)(a+b+1) \leq (1-a)(1-b)(1+a)(1+b) = (1-a^2)(1-b^2) \leq 1$. Suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $a = b = 0, c = 1$ và các hoán vị.

Bài toán 1.14. Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1.$$

Lời giải. Vì $a, b, c \in [0; 1]$ nên ta có

$$a^2(1-b) \leq a(1-b)$$

$$b^2(1-c) \leq b(1-c)$$

$$c^2(1-a) \leq c(1-a).$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên lại ta được

$$\begin{aligned} a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) &\leq a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) \\ &= (a-1)(b-1)(c-1) + 1 - abc \leq 1 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\leq a^2b + b^2c + c^2a + 1. \text{ Điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

Bài toán 1.15. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $|x_i - x_{i+1}| < 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$, ($x - i + 1 = x_1$).

Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1.$$

Lời giải. Do $\frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \dots \frac{x_n}{x_1} = 1$ nên tồn tại chỉ số k sao cho $\frac{x_k}{x_{k+1}} \leq 1$. (1)

Từ giả thiết suy ra $x_i < x_{i+1} + 1 < 2x_i \Rightarrow \frac{x_i}{x_{i+1}} < 2, \forall i$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} = \sum_{i \neq k} \frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_k}{x_{k+1}} < 2(n-1) + 1 = 2n - 1$.

Vậy

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1.$$

Bài toán 1.16. Cho $x_1, x_2, x_3 \in [-1; 1]$ và $y_1, y_2, y_3 \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1-x_1}{1-x_2y_3} + \frac{1-x_2}{1-x_3y_1} + \frac{1-x_3}{1-x_1y_2} \leq 8.$$

Lời giải. Vì $1 - x_1y_2 = (1 - x_1)y_2 + (1 - y_2) > 0$, $1 + x_1 \geq 0$ và $1 - y_2 > 0$ nên ta có

$$\frac{1-x_1}{1-x_1y_2} - \frac{2}{1+y_2} = -\frac{(1+x_1)(1-y_2)}{(1+y_2)(1-x_1y_2)} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1-x_1}{1-x_1y_2} \leq \frac{2}{1+y_2} \leq 2.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được

$$0 \leq \frac{1-x_2}{1-x_2y_3} \leq 2 \text{ và } 0 \leq \frac{1-x_3}{1-x_3y_1} \leq 2.$$

Suy ra

$$\frac{1-x_1}{1-x_1y_2} + \frac{1-x_2}{1-x_2y_3} + \frac{1-x_3}{1-x_3y_1} = \frac{1-x_1}{1-x_2y_3} + \frac{1-x_2}{1-x_3y_1} + \frac{1-x_3}{1-x_1y_2} \leq 8. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x_1 = x_2 = x_3 = -1, y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

Bài toán 1.17. Cho $a, b, c \in (0; \frac{\pi}{2})$. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{\sin a \cdot \sin(a-b) \cdot \sin(a-c)}{\sin(b+c)} \geq 0.$$

Lời giải. Đặt $x = \sin a, y = \sin b, z = \sin c$. Khi đó $x, y, z > 0$.

$$\text{Ta thấy } \sin a \cdot \sin(a-b) \cdot \sin(a-c) \sin(a+b) \sin(a+c) = \sin a (\sin^2 a - \sin^2 b) (\sin^2 a - \sin^2 c) = x(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)$$

$$\text{Do đó cần chứng minh } x(x^2 - y^2)(x^2 - z^2) + y(y^2 - z^2)(y^2 - x^2) + z(z^2 - x^2)(z^2 - y^2) \geq 0$$

Đặt $x = \sqrt{u}, y = \sqrt{v}, z = \sqrt{w}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum \sqrt{u}(u-v)(u-w) \geq 0 \text{ đúng theo bất đẳng thức Schur.}$$

Bài toán 1.18. Cho $x, y, z \in [\frac{1}{2}; 2]$ và a, b, c là một hoán vị tùy ý của chúng .
Chứng minh rằng

$$\frac{60a^2 - 1}{4xy + 5z} + \frac{60b^2 - 1}{4yz + 5x} + \frac{60c^2 - 1}{4zx + 5y} \geq 12.$$

Lời giải. Do $x, y, z \in [\frac{1}{2}; 2]$ nên $(x-2)(2y-1) + (y-2)(2x-1) \leq 0$

$$\Rightarrow 4xy \leq 5(x+y) - 4 \Rightarrow 0 < 4xy + 5z \leq 5(x+y+z) - 4$$

$$\text{Do } 60a^2 - 1 > 0 \text{ nên } \frac{60a^2 - 1}{4xy + 5z} \geq \frac{60a^2 - 1}{5(x+y+z) - 4}.$$

$$\text{Tương tự ta cũng chứng minh được } \frac{60b^2 - 1}{4yz + 5x} \geq \frac{60b^2 - 1}{5(x+y+z) - 4} \text{ và } \frac{60c^2 - 1}{4zx + 5y} \geq \frac{60c^2 - 1}{5(x+y+z) - 4}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{60a^2 - 1}{4xy + 5z} + \frac{60b^2 - 1}{4yz + 5x} + \frac{60c^2 - 1}{4zx + 5y} \geq \frac{60(a^2 + b^2 + c^2) - 3}{5(x+y+z) - 4}.$$

$$\text{Do đó, ta chỉ cần chứng minh } 20(a^2 + b^2 + c^2) - 1 \geq 20(x+y+z) - 16$$

$$\text{Do } a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ nên bất đẳng thức này tương đương với}$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) - 20(x+y+z) + 15 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5(2x-1)^2 + 5(2y-1)^2 + 5(2z-1)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } x = y = z = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 1.19. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + a + b = 3$.
Chứng minh rằng

$$\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Từ giả thiết $a, b > 0$ và $ab + a + b = 3$ ta suy ra ba điều sau:

$$(i) \quad 3 = ab + a + b \leq \frac{(a+b)^2}{4} + a + b \Rightarrow (a+b)^2 + 4(a+b) - 12 \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2$$

hoặc $a+b \leq -6$. Do $a+b \leq -6$ không thể xảy ra nên $a+b \geq 2$ (1)

$$(ii) \quad ab + a + b = 3 \Rightarrow \frac{ab}{a+b} + 1 = \frac{3}{a+b} \Rightarrow \frac{ab}{a+b} = -1 + \frac{3}{a+b} \quad (2)$$

$$(iii) \quad ab + a + b = 3 \Rightarrow (a+1)(b+1) = 4 \quad (3)$$

Sử dụng (2) và (3) để biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$$a^2 + b^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} = 3a \frac{a+1}{4} + 3b \frac{b+1}{4} + \frac{3}{a+b} - 1$$

$$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2) + \frac{3}{4}(a+b) + \frac{3}{a+b} - 1$$

$$\text{hay } 4(a^2 + b^2) + 6 \geq 3(a^2 + b^2) + 3(a+b) + \frac{12}{a+b} - 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 3(a+b) + \frac{12}{a+b} - 10. \quad (4)$$

Để ý rằng $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ nên (4) sẽ được chứng minh nếu bất đẳng thức sau đúng.

$$\frac{(a+b)^2}{2} \geq 3(a+b) + \frac{12}{a+b} - 10. \quad (5)$$

Đặt $s = a + b$. Từ (1) suy ra $s \geq 2$. khi đó bất đẳng thức (5) trở thành $s^2 - 6s - \frac{42}{s} + 20 \geq 0 \Leftrightarrow (s-2)(s^2 - 4s + 12) \geq 0 \forall s \geq 2$ (luôn đúng).
Dấu bằng xảy ra khi $s = 2 \Leftrightarrow a = b = 1$.

2 Một số bài toán tương tự

Bài toán 2.1. Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Chứng minh rằng

$$x + y + z \leq xyz + 2.$$

Bài toán 2.2. Cho $x_1, x_2, \dots, x_{2012} \in (0; 1)$ Chứng minh rằng

$$\sqrt[2011]{x_1 x_2 \dots x_{2012}} + \sqrt[2011]{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{2012})} < 1.$$

Bài toán 2.3. Cho $\sum_{i=1}^{1990} |x_i - x_{i+1}| = 1991$. Đặt $s_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.
Chứng minh rằng

$$|s_1 - s_2| + |s_2 - s_3| + \dots + |s_{1990} - s_{1991}| \geq 1990.$$

Bài toán 2.4. Cho $b^3 + b \leq a - a^3$.

Tìm giá trị lớn nhất của $T = a + b$.

Bài toán 2.5. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2 + 2x(y+z) = 5yz$.

Chứng minh rằng

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + (x+y)(x+z)(y+z) \leq (y+z)^3.$$

Bài toán 2.6. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc = 1$.

Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Bài toán 2.7. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca \geq 0$.

Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^2} + b^2 + \frac{bc}{b^2 + c^2} \geq -\frac{1}{2}.$$

Bài toán 2.8. Cho hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ với diện tích S_1, S_2 và các cạnh tương ứng a_1, b_1, c_1 và a_2, b_2, c_2 . Chứng minh rằng

$$a_1^2(c_2^2 + b_2^2 - a_2^2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2 - b_2^2) + c_1^2(b_2^2 + a_2^2 - c_2^2) \geq 16S_1S_2.$$

Bài toán 2.9. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Bài toán 2.10. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng

$$0 \leq xy + yz + zx \leq \frac{7}{27}.$$

Bài toán 2.11. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện

$$a+b+c=0 \text{ và } a^2+b^2+c^2=6.$$

Chứng minh rằng

$$0 \leq x^2y + y^2z + z^2x \leq 6.$$

Sử dụng hệ thức truy hồi trong bài toán đếm

Nguyễn Thế Hiệp, Lớp 11 Toán, Trường THPT Chuyên Bắc Giang

Bài toán đếm trong tổ hợp là một bài toán khá thông dụng đặc biệt với học sinh chuyên toán. Việc đếm trực tiếp trong đa số các trường hợp là "bất khả thi", điều này hướng chúng ta tới một phương thức đếm khác là đếm gián tiếp. Cùng với các phương pháp khác như: thiết lập song ánh hay sử dụng hàm Sinh, vận dụng số phức, ... thì phương pháp thiết lập quan hệ truy hồi cũng là một phương pháp khá hữu dụng và áp dụng rộng rãi, phổ biến đối với nhiều bài toán khác nhau. Trong bài viết này chúng ta sẽ đề cập đến vấn đề đó.

1 Thiết lập quan hệ đơn truy hồi - một dãy truy hồi

Chúng ta sẽ mở đầu bằng một ví dụ đơn giản và khá quen thuộc từ bậc THCS. Đó là bài toán tháp cổ Hà Nội.

Ví dụ 1.1 (Bài toán tháp cổ Hà Nội). *Lúc khai thiên lập địa, Phật tổ Như Lai đặt 64 chiếc đĩa có kích thước khác nhau lên một cái cọc, đĩa ở trên bé hơn đĩa ở dưới. Các nhà sư được yêu cầu chuyển đĩa từ cọc 1 sang cọc 2 theo nguyên tắc: Mỗi lần chỉ chuyển một đĩa; trong quá trình chuyển, đĩa lớn không được đặt lên trên đĩa nhỏ (cần sử dụng thêm một cọc nữa để thực hiện nguyên tắc này). Tìm số lần chuyển đĩa để có thể chuyển tất cả đĩa ở cọc 1 sang cọc 2.*

Lời giải. Gọi a_n là số lần chuyển n chiếc đĩa từ cọc 1 sang cọc số 2 theo các nguyên tắc trên.

Để chuyển n chiếc đĩa từ cọc 1 sang cọc 2 ta phải thực hiện các công đoạn sau:

1. Chuyển $n - 1$ chiếc đĩa bên trên chiếc đĩa lớn nhất sang cọc số 3 sang nguyên tắc trên. Cần thực hiện a_{n-1} lần chuyển như vậy.
2. Chuyển chiếc đĩa lớn nhất sang cọc số 2
3. Chuyển $n - 1$ chiếc đĩa từ cọc số 3 sang cọc số 2. Cần thực hiện a_{n-1} lần chuyển.

Như vậy ta thu được hệ thức $a_n = 2a_{n-1} + 1$

Với chú ý rằng $a_1 = 1$ ta có $a_n = 2^n - 1$. Như vậy $a_{64} = 2^{64} - 1$. $\square$

Ví dụ 1.2 (Bài toán chia kẹo Euler). Có bao nhiêu cách chia m cái kẹo cho n đứa trẻ?

Lời giải. Bài toán tương đương với bài toán tìm số nghiệm tự nhiên của phương trình

$$m = x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \quad (1)$$

Hiển nhiên,

$$(1) \Leftrightarrow m - x_1 = x_2 + \cdots + x_n. \quad (2)$$

Gọi $S(m; n)$ là số nghiệm của phương trình (1). Khi đó với mỗi giá trị của x_1 ; ($0 \leq x_1 \leq m$) ta có số nghiệm của phương trình (2) là $S(m - x_1; n - 1)$.

Từ đó ta thu được hệ thức $S(m; n) = \sum_{x=0}^m S(m - x; n - 1)$. Chú ý rằng

$$S(m; 1) = 1; S(m; 2) = m + 1; S(m; 3) = \frac{(m+2)(m+1)}{2}$$

Bằng quy nạp ta có $S(m; n) = C_{m+n-1}^{n-1}$.

Thật vậy, giả sử mệnh đề đúng với n , ta chứng minh nó đúng với $n + 1$

$$\begin{aligned} S(m; n+1) &= \sum_{x=0}^m S(m-x; n) = \sum_{x=0}^m C_{m-x+n-1}^{n-1} \\ &= \sum_{x=0}^m C_{x+n-1}^{n-1} = \sum_{x=0}^m (C_{x+n}^n - C_{x-1+n}^n) = C_{m+n}^n \end{aligned} \quad (\square)$$

Nhận xét 1.1. Đây là một bài toán khá đơn giản nhưng cũng có nhiều ứng dụng chẳng hạn trong bài thi VMO 2012 (bài số 6, ngày 2). Ngoài lời giải trên, ta cũng có thể giải này bằng phương pháp song ánh hoặc hàm Sinh.

Ví dụ 1.3 (Mở rộng Pro.3-Canada MO 1996). Tìm số hoán vị $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ của tập $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ |a_{i+1} - a_i| \leq 2, \forall i = 1; 2; \dots; n-1 \end{cases}$$

Lời giải. Gọi x_n là số các hoán vị của $\{1; 2; \dots; n\}$ thỏa mãn bài toán và A_n là tập hợp các hoán vị đó.

Ta có với $n \geq 5$ xét hoán vị $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ thỏa mãn tính chất đã cho.

Vì $|a_2 - a_1| = |a_2 - 1| < 2$ nên $a_2 = 2 \vee 3$ do đó chỉ xảy ra các trường hợp sau:

1. Nếu $a_2 = 2$ thì xét $(b_1; b_2; \dots; b_{n-1}) \equiv (a_2 - 1; \dots; a_n - 1)$ và $(b_1; b_2; \dots; b_{n-1})$ là một hoán vị của $\{1; 2; \dots; n - 1\}$ mà

$$b_1 = 1; |b_{i-1} - b_i| = |a_i - a_{i+1}| \leq 2, \quad i = 1; 2; \dots; n - 1.$$

Suy ra $(b_1; b_2; \dots; b_{n-1}) \in A_{n-1}$. Hơn nữa, $(a_1; 2; a_3; \dots; a_n) \in A_n$ và phép tương ứng

$$(a_1; 2; a_3; \dots; a_n) \rightarrow (a_1 - 1; a_2 - 1; \dots; a_n - 1)$$

là một song ánh nên có x_{n-1} hoán vị mà $a_2 = 2$.

2. Nếu $a_2 = 3$ ta có các khả năng sau:

- Nếu $a_i = 2$ với mọi $3 < i < n$ thì $a_{i-1} = a_{i+1} = 4$, vô lí. Ta xét $a_3 = 2 \vee a_n = 2$.
- Nếu $a_n = 2$ thì $a_{n-1} = 4; a_3 = 5$, có một bộ số thỏa mãn là

$$\left(1; 3; \dots; 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1; 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor; 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2; \dots; 2\right).$$

- Nếu $a_3 = 2$ thì $a_4 = 4$, mỗi bộ số $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ tương ứng với một bộ số $(a_4 - 3; a_5 - 3; \dots; a_n - 3) \in A_{n-3}$. Vậy nên có x_{n-3} hoán vị như thế.

Ta có hệ thức $x_n = x_{n-1} + x_{n-3} + 1, n \geq 5$. Chú rằng $x_1 = x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 4$, từ đây có thể tìm được số bộ thỏa mãn theo n . $\square$

Ví dụ 1.4 (Swedish MO 2005-2006). Một hàng gồm n người đứng trước một máy thu tiền. Sau đó máy thu tiền đóng lại vì một lí do kĩ thuật và n người đó được bố trí lại trong một hàng khác. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng mà nếu mỗi người trong hàng hoặc đứng nguyên vị trí ban đầu hoặc đứng ở vị trí liền trước hoặc đứng ở vị trí liền sau.

Lời giải. Gọi a_n là số hoán vị f của tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thỏa mãn tính chất $k - 1 \leq f(k) \leq k + 1$ với $1 \leq k \leq n$, khi đó ta có $f(n) \in \{n - 1; n\}$.

Với $n \geq 3$ nếu f có tính chất đó thì ta có:

1. Nếu $f(n) = n - 1$, thì $f(n - 1) = n$ các số $1; 2; \dots; n - 2$ có a_{n-2} hoán vị thỏa mãn tính chất nêu trên.
2. Nếu $f(n) = n$, các số $1; 2; 3; \dots; n - 1$ có a_{n-1} hoán vị thỏa mãn tính chất đó.

Ta có hệ thức $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Chú ý rằng $a_1 = 1; a_2 = 2$ ta được

$$a_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right),$$

trong đó F_n là số hạng thứ n trong dãy số Fibonacci.

Trường hợp $n = 12$ là bài toán gốc. □

Ví dụ 1.5 (Romanian MO 1995). Cho $A_1; A_2; \dots; A_n$ là các điểm nằm trên đường tròn. tìm số cách tô các điểm đó bằng $p \geq 2$ màu sao cho hai điểm liên tiếp được tô hai màu phân biệt.

Lời giải. Gọi $a_n, n \geq 2$ là số cách tô màu cần tìm. Xét tập hợp điểm $\{A_1; A_2; \dots; A_{n+1}\}$.

1. Nếu A_1, A_n khác màu nhau thì có thể tô màu $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ bởi a_n cách và tô màu A_{n+1} theo $p-2$ cách. Do đó chúng ta thu được $(p-2)a_n$ cách tô màu.
2. Nếu A_1, A_n được tô màu giống nhau thì đồng nhất $A_1 \equiv A_n$ ta thu được a_{n-2} cách tô màu các điểm $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, trong khi có $(p-1)$ cách tô màu A_{n+1} . Ta thu được $(p-1)a_{n-2}$ cách tô màu.

Do đó ta có hệ thức $a_{n+1} = (p-2)a_n + (p-1)a_{n-1}$.

Chú ý rằng $a_2 = p(p-1); a_3 = p(p-1)(p-2)$, ta được $a_n = (p-1)^n + (-1)^n(p-1)$. □

Ví dụ 1.6 (Bulgarian MO 1998). Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Hãy tìm số các hoán vị $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ của tập $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số thỏa mãn $a_i > a_{i+1}$.

Lời giải. Gọi x_n là số các hoán vị thỏa mãn điều kiện bài toán. Mỗi hoán vị có $n+1$ phần tử có thể tạo ra bằng một trong các cách sau đây:

1. Bổ sung thêm $a_{n+1} = n+1$ vào mỗi hoán vị có n phần tử thỏa mãn điều kiện bài toán, có tất cả x_n hoán vị như vậy.
2. Bổ sung thêm phần tử $a_j = n+1$ vào giữa a_i, a_{i+1} mà $a_i > a_{i+1}$ của một hoán vị nào đó có n phần tử thỏa mãn bài toán.
3. Bổ sung thêm $a_j = n+1, j = 0; 1; 2; \dots; n-1$ vào hoán vị mà n phần tử được sắp thứ tự.

Do vậy thu được $x_{n+1} = x_n + x_n + n = 2x_n + n$.

Chú ý rằng $x_2 = 1$, từ đó ta có $x_n = 2^n - n - 1$. □

Ví dụ 1.7. Có bao nhiêu số có n chữ số chia hết cho 5 và hai chữ số liên tiếp bất kì khác nhau.

Lời giải. Gọi A_n là tập hợp các số có n chữ số thỏa mãn bài toán. Đặt $a_n = \text{card}(A_n)$, mỗi số thuộc A_{n+1} được tạo ra bằng một trong hai cách sau đây:

1. Thêm vào trước mỗi số thuộc A_n một chữ số khác với chữ số đầu tiên của số đó, có tất cả 8 cách thêm như vậy.
2. Bỏ chữ số đầu tiên của của một số thuộc A_n (sau khi bỏ như thế chỉ còn a_{n-2} số phân biệt có $n-2$ chữ số là bội của 5 và các chữ số liên tiếp là khác nhau) và thêm vào trước đó hai chữ số 10; 20; 30; ...; 90; có tất cả 9 cách thêm như thế.

Do đó ta có hệ thức $a_{n+2} = 8a_{n+1} + 9a_n$

Với chú ý rằng $a_1 = 2, a_2 = 17$ ta thu được $a_n = \frac{19}{90} \cdot 9^n - \frac{(-1)^n}{10}$ □

Ví dụ 1.8. Tìm số tập con của tập $\{1; 2; \dots; n\}$ sao cho trong mỗi tập con chứa đúng hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.

Lời giải. Trước hết ta có bài toán phụ: **Tìm số tập con của tập $\{1; 2; \dots; n\}$ sao cho trong mỗi tập con không chứa hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.**

Bài toán này xem như bài tập (giải bằng truy hồi hoặc song ánh). Số tập con thỏa mãn bài toán là

$$x_n = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right),$$

trong đó F_n là số hạng thứ n trong dãy số Fibonacci.

Gọi A_n là tập các tập con của tập $\{1; 2; \dots; n\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán, đặt $a_n = \text{card}(A_n)$. Mỗi tập thuộc $A \in A_{n+2}$ được chia thành 3 loại: Loại 1 gồm các tập hợp chứa cả 2 phần tử: $n+1, n+2$; loại 2 gồm các tập hợp không chứa $n+2$; loại 3 gồm các tập hợp chứa $n+2$ nhưng không chứa $n+1$.

1. Nếu A là tập con loại 1 thì A không chứa n . Bỏ đi khỏi A hai phần tử $n+1, n+2$ ta được một tập con của tập $\{1; 2; \dots; n-1\}$ và không chứa hai số nguyên liên tiếp. Như vậy có $x_{n-1} = F_{n+1}$ tập con loại 1.
2. Mỗi tập con loại 2 là một tập con của A_{n+1} và ngược lại. Có a_{n+1} tập loại 2.

3. Nếu A là tập con loại 3 thì A không chứa $n + 1$. Bỏ đi khỏi A phần tử $n + 2$ ta được một tập con của A_n . Vậy có a_n tập con loại 3.

Do đó ta có hệ thức

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + F_{n+1}.$$

Chú ý rằng $a_2 = 1; a_3 = 2$ ta thu được

$$a_n = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}. \quad (\square)$$

Ví dụ 1.9 (Colombia MO 1997). Xét bảng ô vuông $m \times n$ được tô các viên bởi 3 màu. Chúng ta tô mỗi đoạn của đường viền bởi một trong số 3 màu sao cho mỗi hình vuông đơn vị có hai cạnh tô 1 màu và hai cạnh kia tô bởi hai màu còn lại. Có bao nhiêu cách tô màu có thể?

Lời giải. Gọi 3 màu là A, B, C ; đặt a_n là số cách tô màu đường viền của một bảng ngang $1 \times n$ khi đã biết màu của các đoạn viền phía trên bảng ngang đó. Với $n = 1$, không mất tính tổng quát giả sử viền trên được tô màu A . Sau đó sẽ có 3 cách chọn tô màu 3 đoạn kia bằng màu A , có hai cách chọn tô màu hai đoạn còn lại. Do vậy $a_1 = 6$.

Xét bảng $1 \times n$, không mất tính tổng quát giả sử đoạn cuối cùng bên phải tô màu A . Bổ sung thêm một hình vuông đơn vị vào bên phải bảng vừa rồi ta được một bảng $1 \times (n + 1)$ với màu đoạn viền trên của hình vuông mới đã biết. Chúng ta có hai cách tô màu cho hình vuông đã biết màu hai cạnh này (cạnh bên trái và cạnh trên). Do đó $a_{n+1} = 2a_n, a_n = 3 \cdot 2^n$

Trở lại bài toán, có 3^n cách tô màu cho đường viền trên cùng và có $3 \cdot 2^n$ cách tô cho mỗi hàng kế tiếp. Vậy có tất cả $3^{m+n} \cdot 2^{mn}$ cách tô màu thỏa mãn bài toán. $\square$

Ví dụ 1.10 (Hungary-Israel Mathematical Competition 1997). Có tất cả bao nhiêu dãy có độ dài bằng 1997 có thể lập được bằng cách sử dụng số lẻ lần các chữ cái A, B, C .

Lời giải. Gọi x_n là số dãy có độ dài bằng $n = 2m + 1$. Với mỗi dãy có độ dài bằng $n = 2m + 1$ ta có:

1. Nếu dãy đó thỏa mãn điều kiện thì ta có 3 cách thêm hai chữ cái giống nhau vào cuối mỗi dãy để thu được các dãy có độ dài bằng $n + 2$.

2. Nếu dãy đó không phải là dãy thỏa mãn điều kiện bài toán, tuy nhiên số lần xuất hiện của A, B, C không thể đều là số chẵn nên sẽ có hai chữ cái xuất hiện số chẵn lần và một chữ cái xuất hiện số lẻ lần trong mỗi dãy này. Thành thử ta có hai cách thêm hai chữ cái vào cuối các dãy này để được dãy có độ dài bằng $n + 2$

Vì vậy, $x_{n+2} = 3x_n + 2(3^n - x_n) = x_n + 2 \cdot 3^n$. Kết hợp với $x_3 = 6$ ta có $x_n = \frac{3}{4}(3^{n-1} - 1)$ hay $x_{2m+1} = \frac{3}{4}(3^{2m} - 1)$, suy ra $x_{1997} = \frac{3}{4}(3^{1996} - 1)$. $\square$

Ý tưởng truy hồi đối với nhiều bài toán là rất rõ ràng, song thực hiện nó đôi khi không hề dễ dàng, chẳng hạn với bài IMO Shortlist 2008.

Ví dụ 1.11 (IMO Shortlist 2008). Với mỗi số nguyên dương n , hãy tìm số hoán vị của tập hợp $\{1; 2; \dots; n\}$ có tính chất $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) : k$ với mọi số $k = 1; 2; \dots; n$.

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương n đặt F_n là số hoán vị của $\{1; 2; \dots; n\}$ thỏa mãn tính chất đã cho, ta gọi chúng là hoán vị đẹp.

Với $n = 1, 2, 3$ ta có số hoán vị đẹp là $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 6$.

Với $n > 3$ xét hoán vị đẹp bất kì $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ của $\{1; 2; \dots; n\}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}(n-1) | 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) &= 2((1 + 2 + \dots + n) - a_n) \\ &= n(n+1) - 2a_n = (n+2)(n-1) + (2 - 2a_n)\end{aligned}$$

nên $(2a_n - 2) : n - 1$. Vì vậy $(2a_n - 2) = 0; n - 1; 2n - 2$. Điều đó đồng nghĩa với $a = 1$ hoặc $a = \frac{n+1}{2}$ hoặc $a = n$ Giả sử $a = \frac{n+1}{2}$, vì là một hoán vị đẹp nên khi cho $k = n - 2$ ta có

$$(n-1) | 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) = (n+1)n - (n+1) - 2a_{n-1} = (n+2)(n-2) + (3 - 2a_{n-1}).$$

Do đó $2a_{n-1} - 3 : (n - 2)$ nên $2a_{n-1} - 3 = 0; n - 2; 2n - 4$. Loại trường hợp $2a_{n-1} - 3$ bằng $0; 2n - 4$ vì $2a_{n-1} - 3$ là số lẻ. Khả năng còn lại $2a_{n-1} - 3 = n - 2$ không thể xảy ra vì khi đó $a_{n-1} = \frac{n+1}{2} = a_n$. Điều đó có nghĩa là $\frac{n+1}{2}$ không là giá trị mà a_{n-1} có thể nhận. Xét hai trường hợp sau:

1. Nếu $a_n = n$ thì $(a_1; a_2; \dots; a_{n-1})$ là một hoán vị đẹp của $\{1; 2; \dots; n - 1\}$.

Có F_{n-1} hoán vị như thế. Bổ sung n vào cuối của mỗi hoán vị này ta được một hoán vị đẹp của tập $\{1; 2; \dots; n\}$.

2. Nếu $a_n = 1$ thì là $(a_1 - 1; a_2 - 1; \dots; a_{n-1} - 1)$ một hoán vị đẹp của $\{1; 2; \dots; n - 1\}$ vì

$$2((a_1 - 1) + \dots + (a_k - 1)) = 2(a_1 + \dots + a_k) - 2k : k, \forall k \leq n - 1.$$

Mỗi hoán vị $(b_1; b_2; \dots; b_{n-1})$ trong số hoán vị đẹp của $\{1; 2; \dots; n - 1\}$ cho ta một hoán vị đẹp của tập $\{1; 2; \dots; n\}$ có phần tử cuối là 1. Đó là $(b_1 + 1; b_2 + 1; \dots; b_{n-1} + 1; 1)$.

Hai phép tương ứng song ánh mà chúng ta đã thiết lập ở trên cho chúng ta hệ thức $F_n = 2F_{n-1}$. Với chú ý rằng $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 6$ ta thu được

$$F_n = 3 \cdot 2^{n-2}, n \geq 3. \quad (\square)$$

Ví dụ 1.12 (IMO 2011). *Giả sử n là một số nguyên dương. Cho một cái cân hai đĩa và n quả cân với trọng lượng là $2^0; 2^1; \dots; 2^{n-1}$. Ta muốn đặt lên cái cân một trong n quả cân, lần lượt từng quả một, theo cách để đảm bảo đĩa cân bên phải không bao giờ nặng hơn đĩa cân bên trái. Ở mỗi bước ta chọn một trong các quả cân chưa được đặt lên cân, rồi đặt nó hoặc vào đĩa bên trái, hoặc vào đĩa bên phải, cho đến khi tất cả các quả cân đều đã được đặt lên cân. Xác định xem, có bao nhiêu cách khác nhau để thực hiện được mục đích đề ra.*

Lời giải. Xét $n \geq 2$. Ta thấy trước tiên, đĩa cân bên trái luôn phải nặng hơn đĩa cân bên phải ít nhất là 1. Vì vậy, nếu ở một bước nào đó ta đặt quả cân nặng là 1 lên một trong hai đĩa thì đĩa cân bên phải không bao giờ nặng hơn đĩa cân bên trái. Do đó ta chỉ xét các quả cân: $1; 2^2; \dots; 2^{n-1}$.

Nếu ta chia trọng lượng mỗi quả cân cho 2 thì đáp án không đổi nên có $f(n - 1)$ cách đặt quả cân $n - 1$ đó. Giờ xét quả cân 1:

1. Nếu đặt quả cân này trong lượt đặt đầu tiên thì ta chỉ có thể đặt vào đĩa bên trái.
2. Nếu đặt quả cân này trong các lượt đặt tiếp theo thì ta có thể đặt vào bên trái hay phải tùy ý. Có $2n - 2$ cách đặt trong trường hợp này.

Như vậy ta thu được hệ thức $f(n) = (2n - 1)f(n - 1)$.

Với chú ý rằng $f(1) = 1$ ta có $f(n) = (2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$. □

Nhận xét 1.2. *Nếu không xét riêng các khả năng của quả cân 1 như trên thì ta cũng có thể xét riêng các khả năng của quả cân 2^{n-1} với chú ý rằng $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1 < 2^{n-1}$.*

2 Thiết lập các dãy truy hồi lồng nhau

Đếm bằng hệ thức truy hồi khá hữu dụng nhưng đối với đa số bài toán thì việc đếm bằng một dãy truy hồi tỏ ra vô hiệu, ấy là khi ta phải nghĩ đến các dãy truy hồi lồng nhau (cũng giống như "DAC - Chia để trị" trong bất đẳng thức). Chúng ta sẽ bắt đầu "công cụ hữu hiệu" này bằng một ví dụ đã từng xuất hiện trong kì thi IMO năm 1979, đó là bài số 6 do Đức đề nghị.

Ví dụ 2.1 (IMO-1979). Cho A và E là hai đỉnh đối tâm của một hình bát giác đều. Một con ếch bắt đầu nhảy từ A . Tại bất cứ đỉnh nào trừ E , ếch có thể tới một trong hai đỉnh kề. Nếu ếch nhảy tới E thì nó dừng lại ở đó. Gọi a_n là số đường đi phân biệt của đúng n bước nhảy để ếch nhảy từ A đến E . Chứng minh rằng

$$a_{2n-1} = 0; a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1} \right].$$

Lời giải. Rõ ràng $a_{2n-1} = 0$ là hiển nhiên. Gọi là số đường đi từ C tới E qua n bước nhảy. Qua hai bước nhảy đầu tiên, ếch có thể về A hoặc đến C hoặc G . Do đó

$$a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2} \text{ với mọi } n > 0.$$

Từ C (hoặc G), sau hai bước nhảy ếch có thể về lại C hoặc tới A , nếu $n > 2$. Do đó ta có

$$b_{2n} = 2b_{2n-2} + 2a_{2n-2} \text{ với mọi } n > 1.$$

Suy ra $a_{2n} = 4a_{2n-2} - 2a_{2n-2}$

Kết hợp với $a_2 = 0; a_4 = 2$ ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.2 (Austrian-Polish MC 1998). Cho n điểm $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ được xếp theo thứ tự đó trên một đường thẳng. Ta tô màu mỗi điểm bởi 1 trong năm màu: trắng, đen, đỏ, xanh và tím. Một cách tô màu được coi là hợp lệ nếu hai điểm liên tiếp P_i, P_{i+1} được tô màu giống nhau hoặc ít nhất một trong hai điểm được tô màu trắng. Có bao nhiêu cách tô màu hợp lệ như vậy?

Lời giải. Gọi a_n là số cách tô màu thỏa mãn bài toán mà điểm được tô màu trắng, là b_n số cách tô màu thỏa mãn bài toán mà điểm không được tô màu trắng và c_n là tổng số cách tô màu thỏa mãn bài toán. Chúng ta thu được các hệ thức sau

$$\begin{aligned} a_n &= c_{n-1} \\ b_n &= 4a_{n-1} + b_{n-1} \\ c_n &= a_n + b_n \end{aligned}$$

Do đó ta có $c_n = a_n + b_n = c_{n-1} + b_n = c_{n-1} + (a_{n-1} + b_{n-1}) + 3a_{n-1} = 2c_{n-1} + 3c_{n-2}$.

Chú ý rằng $c_1 = 5, c_2 = 13$ ta thu được $c_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}{2}$. □

Ví dụ 2.3. Tìm số các bộ số nguyên $(a_1; a_2; \dots; a_n), n > 1$ thỏa mãn $|a_i| \leq 1, \forall i = 1; 2; \dots; n$ và $|a_i - a_{i+1}| \leq 1, \forall i = 1; 2; \dots; n$.

Lời giải. Gọi S_n là số bộ số thỏa mãn điều kiện bài toán. Gọi A_n, B_n, C_n là tập hợp các bộ số bằng $-1; 0; 1$ tương ứng. Ta có $|S_n| = |A_n| + |B_n| + |C_n|$. Mặt khác từ mỗi bộ số thuộc A_n hoặc B_n ta có thể bổ sung thêm phần tử $a_{n+1} = -1$ để được một bộ số thuộc A_{n+1} nên $|A_{n+1}| = |A_n| + |B_n|$. Tương tự ta có

$$|C_{n+1}| = |C_n| + |B_n| ; |B_{n+1}| = |A_n| + |B_n| + |C_n| = |S_n|.$$

Do đó ta có

$$|S_{n+1}| = |A_{n+1}| + |B_{n+1}| + |C_{n+1}| = (|A_n| + |B_n| + |C_n|) + |B_{n+1}| + |B_n| = 2|S_n| + |S_{n-1}|.$$

Chú ý rằng $|S_2| = 7; |S_3| = 17$ ta thu được $|S_n| = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2}$. (☒)

Một bài toán có cùng tư tưởng như bài toán trên là

Ví dụ 2.4 (Polish-Austrian Mathematical Competition). Xét tất cả các các chuỗi kí tự gồm 3 chữ cái a, b, c . Có bao nhiêu chuỗi n kí tự đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. Chuỗi kí tự phải bắt đầu và kết thúc bởi chữ a ;
2. Hai vị trí liên kề phải được viết bởi hai chữ cái khác nhau.

Lời giải. Xét chuỗi kí tự có độ dài bằng n bắt đầu bởi chữ a và thỏa mãn điều kiện 2.

Đặt a_n, b_n, c_n lần lượt là số chuỗi kí tự tận cùng bởi a, b, c tương ứng.

Mỗi chuỗi kí tự kết thúc bởi a và có độ dài bằng $n + 1$ được tạo ra (và chỉ được tạo ra) bằng cách thêm a vào cuối các chuỗi kí tự tận cùng bởi b hoặc c và có độ dài bằng n , vì vậy ta thu được hệ thức $a_{n+1} = b_n + c_n$. Tương tự ta có

$$b_{n+1} = a_n + c_n ; c_{n+1} = a_n + b_n.$$

Vì kí hiệu b, c chỉ mang tính hình thức, chúng có vai trò bình đẳng nên ta có $c_n = b_n$. Từ đó suy ra

$$a_{n+1} = 2b_n; b_{n+1} = a_n + b_n \Rightarrow a_{n+2} - a_{n+1} = 2(b_{n+1} - b_n) = 2a_n.$$

Ta thu được hệ thức truy hồi $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

Với chú ý rằng $a_1 = 1, a_2 = 0$ ta có $a_n = \frac{2}{3}(2^{n-2} + (-1)^{n-1})$. □

Ví dụ 2.5. Có bao nhiêu chuỗi gồm n kí tự được tạo ra từ tập hợp $\{a; b; c; d\}$ trong đó a, b không bao giờ đứng cạnh nhau.

Lời giải. Gọi y_n, y_n, x_n, x_n lần lượt là số các chuỗi kí tự có tận cùng là a, b, c, d (do tính đối xứng, số chuỗi kí tự tận cùng bằng a bằng số chuỗi kí tự tận cùng bằng b và số chuỗi kí tự tận cùng bằng c bằng số chuỗi kí tự tận cùng bằng d) và S_n là số cách thành lập chuỗi n kí tự thỏa mãn bài toán. Chúng ta thu được các hệ thức

$$x_n = 2x_{n-1} + 2y_{n-1}; y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}.$$

Từ đó suy ra $S_n = x_{n+1}$ và $x_{n+1} = 3x_n + 2x_{n-1}$.

Với chú ý rằng $x_1 = 1; x_2 = 2$, ta thu được

$$S_n = x_{n+1} = \left(\frac{7\sqrt{17}}{68} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right)^{n+1} + \left(-\frac{7\sqrt{17}}{68} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right)^{n+1}. \quad (\square)$$

Bài toán sau đây là một bài toán đã được đăng trên tạp chí THTT năm 2011 (bài T12/410), tuy nhiên nó cũng đã xuất hiện trước đó rất lâu trong kì thi Romanian MO 2000.

Ví dụ 2.6 (Romanian MO 2000-T12/410-THTT). Với số nguyên dương n không nhỏ hơn 2. tìm số các hàm số $f : \{1; 2; 3; \dots; n\} \rightarrow \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và thỏa mãn tính chất

$$|f(k+1) - f(k)| \geq 3 \text{ với mọi } k \in \{1; 2; \dots; n-1\}.$$

Lời giải. Ta sử dụng nhận xét:

Nếu hàm số f thỏa mãn điều kiện bài ra thì với mọi $n > 2$ cho trước ta luôn có $f(n) \neq 3$.

Thật vậy, nếu $f(n) = 3$ thì suy ra $f(n-1) \leq 0$ hoặc $f(n-1) \geq 6$, điều này là vô lí.

Kí hiệu a_n, b_n, d_n, e_n là số các hàm $f : \{1; 2; 3; \dots; n\} \rightarrow \{1; 2; 3; 4; 5\}$ thỏa mãn tính chất đã cho ứng với $f(n)$ tương ứng bằng 1, 2, 4, 5.

Khi đó $a_2 = e_2 = 2$ và $b_2 = d_2 = 1$, nên với $n \geq 2$ có

$$a_{n+1} = d_n + e_n; b_{n+1} = e_n; e_{n+1} = a_n + b_n; d_{n+1} = a_n.$$

Ta cần tính tổng $S_n = a_n + b_n + d_n + e_n$.

Ta có $a_2 = e_2 = 2$ và $b_2 = d_2 = 1$. Bằng phương pháp quy nạp, ta có $a_n = e_n, b_n = d_n$.

Do vậy $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, S_n = 2a_{n+1}$. Suy ra

$$S_n = \left(\frac{5 - 3\sqrt{5}}{5} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{5} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (\square)$$

Ví dụ 2.7 (Romanian TST 2006-Tạp chí AMM). Cho n là một số nguyên dương. Một tập $S \subset \{0; 1; \dots; 4n-1\}$ được gọi là "rời rạc" nếu với số k bất kì thỏa mãn điều kiện sau đây:

1. Tập hợp $S \cap \{4k - 2; 4k - 1; 4k; 4k + 1; 4k + 2\}$ có tối đa 2 phần tử.
2. Tập hợp $S \cap \{4k + 1; 4k + 2; 4k + 3\}$ có tối đa 1 phần tử.

Hỏi tập hợp $\{0; 1; \dots; 4n - 1\}$ có chính xác bao nhiêu tập con "rời rạc"?

Lời giải. Đặt T_n là tổng số tập con "rời rạc" cần đếm, A_n là số tập con "rời rạc" bao gồm một trong hai phần tử $(4n - 1; 4n - 2)$ và B_n là số tập con không chứa phần tử nào trong hai phần tử đó (không có hai tập "rời rạc" có thể chứa cả 2 phần tử vì khi đó điều kiện 2. không thỏa mãn).

Ta thu được các hệ thức

$$A_{n+1} = T_n + T_n + T_n + B_n = 2T_n + B_n.$$

Và $B_{n+1} = T_n + T_n + T_n + B_n = 2T_n + B_n$, suy ra $T_{n+1} = 6T_n + 2B_n = 7T_n$.

Với chú ý rằng $A_1 = B_1 = 4; T_1 = 8$, ta có $T_n = 8 \cdot 7^{n-1}$. □

Phép đếm bằng truy hồi cũng được áp dụng trong việc đếm số các sự phân hoạch của hình vẽ. Ngay sau đây chúng ta sẽ tiếp tục với một bài toán đã từng được đăng trên tạp chí American Mathematical Monthly do I. Tomescu đề xuất.

Ví dụ 2.8 (Tạp chí AMM). Có bao nhiêu cách chia hình chữ nhật kích thước $2n \times 3$ thành các hình chữ nhật kích thước 2×1 .

Lời giải. Gọi a_n là số cách chia hình chữ nhật $2n \times 3$ thành các hình chữ nhật 2×1 , còn b_n là số cách hình chữ nhật $2n \times 3$ bị khuyết một hình vuông 1×1 ở góc thành các hình chữ nhật 2×1 .

Với mỗi cách chia hình chữ nhật $2n \times 3$ mà không có hình vuông 1×1 nào bị khuyết ở góc ta có 3 cách thêm 3 hình chữ nhật để tạo thành một hình chữ nhật $2(n + 1) \times 3$.

Và ta cũng có hai cách tạo hình chữ nhật $2(n + 1) \times 3$ từ hai hình chữ nhật kích thước $2n \times 3$ bị khuyết hình vuông 1×1 ở góc. Do đó ta có $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$

Tương tự ta cũng có $b_{n+1} = a_n + b_n$.

Chú ý rằng $a_1 = 3, b_1 = 1, a_2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$ ta thu được

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(\sqrt{3} + 1) (2 + \sqrt{3})^n + (\sqrt{3} - 1) (2 - \sqrt{3})^n \right]. \quad (\square)$$

Đối với bài toán đếm số cách phân hoạch hình vẽ bằng phương pháp truy hồi thì ta cũng cần chuyển nó về ngôn ngữ đại số để dễ "ăn nói" trong quá trình trình bày lời giải bài toán. Điều này được minh chứng trong ví dụ 2.9.

Ví dụ 2.9 (Tukey TST 2006). Tìm số cách chia hình chữ nhật $n \times 2$ thành các hình chữ nhật có độ dài nguyên không vượt quá n . (Hai cách chia tạo bởi nhau bằng phép quay 180° được coi là hai cách chia phân biệt)

Lời giải. Xét hình chữ nhật với đỉnh $(0; 0), (0; 2), (n; 0), (n; 2)$ trong mặt phẳng Descartes. Một sự phân hoạch có thể biểu diễn bởi tập E các đoạn thẳng mà tạo thành những đường viền (khác với viền hình chữ nhật lớn) của hình chữ nhật nhỏ.

Ta gọi 1 sự phân hoạch là loại A nếu $[(n-1; 1), (n; 1)] \in E$ và là loại B nếu $[(n-1; 1), (n; 1)] \notin E$. Với mỗi sự phân hoạch và với $0 \leq k \leq 2, 0 \leq j \leq 1$, đặt tập

$$\Omega = \{[(k; n-1), (k; n)], [(n; j), (n; j+1)]\} \cup \{[(n-1; 0), (n-1; 1)], [(n-1; 1), (n-1; 2)]\}.$$

Để thấy rằng $E' \setminus \Omega$ tạo thành một sự phân hoạch hình chữ nhật $2 \times (n-1)$ với đỉnh là

$$(0; 0), (0; 2), (n-1; 0), (n-1; 2).$$

Nếu E' là tập loại A nghĩa là $[(n-1; 1), (n; 1)] \in E$, khi đó có 5 tập E tương ứng có thể bao gồm 4 tập loại A và 1 tập loại B .

Nếu E' là tập loại B nghĩa là $[(n-1; 1), (n; 1)] \notin E$, khi đó có 3 tập E tương ứng có thể bao gồm 1 tập loại A và 2 tập loại B .

Đặt $A_n = \text{card}(A), B_n = \text{card}(B), C_n = A_n + B_n$ ta có $A_n = 4A_{n-1} + B_{n-1}; B_n = A_{n-1} + 2B_{n-1}$ và

$$C_n = A_n + B_n = 6(A_{n-1} + B_{n-1}) - 7(A_{n-2} + B_{n-2}) = 6C_{n-1} - 7C_{n-2}.$$

Với chú ý rằng $C_1 = 2, C_2 = 8$ ta thu được $C_n = \frac{2+\sqrt{2}}{2} (2+\sqrt{3})^{n-1} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3}-2)^{n-1}$. $\square$

Ví dụ 2.10 (Romanian MO 2003). Cho n là một số nguyên dương. Có bao nhiêu số có n chữ số từ tập hợp $\{2; 3; 7; 9\}$ và chia hết cho 3.

Lời giải. Gọi A_n là tập hợp các số có n chữ số lập từ tập $\{2; 3; 7; 9\}$ và chia hết cho 3, và B_n là tập hợp các số có n chữ số lập từ tập $\{2; 3; 7; 9\}$ và không chia hết cho 3. Cần tìm $a_n = \text{card}(A_n)$. Đặt $b_n = \text{card}(B_n)$. Ta thấy mỗi số thuộc A_{n+1} chỉ có thể thu được bằng hai cách sau:

- Lấy một số thuộc A_n rồi thêm 3 hoặc 9 vào phía sau (có 2 cách thêm).
- Lấy một số thuộc B_n rồi thêm 2 hoặc 7 vào phía sau nhưng chỉ có duy nhất một cách thêm với mỗi số.

Suy ra $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, tương tự ta có $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$.

Từ đó ta có $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$, với chú ý $a_1 = 2, a_2 = 6$ ta được $a_n = \frac{4^n + 2}{3}$. $\square$

Ví dụ 2.11 (IMO Shortlist 1987). Có bao nhiêu số có n chữ số từ tập các số $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ thỏa mãn hai chữ số liên tiếp hơn kém nhau tối đa là 1 đơn vị.

Lời giải. Gọi x_n là số các số có n chữ số thỏa mãn điều kiện bài toán, và y_n, z_n, u_n, v_n lần lượt là số các số có n chữ số mà chữ số khởi đầu lần lượt là 0, 1, 2, 3, 4 (do tính đối xứng nên số các số bắt đầu bởi 0 bằng số các số bắt đầu bởi 4; số các số bắt đầu bởi 2 bằng số các số bắt đầu bởi 3).

Chúng ta thu được các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} (1) \quad y_n &= z_{n-1}; & (2) \quad z_n &= y_{n-1} + u_{n-1} \\ (3) \quad u_n &= 2z_{n-1}; & (4) \quad x_n &= 2y_n + 2z_n + u_n. \end{aligned}$$

Từ (1),(2) và (3) ta có $z_n = z_{n-2} + 2z_{n-2} = 3z_{n-2}$ với $z_1 = 1, z_2 = 2$ ta thu được

$$z_{2n} = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ và } z_{2n+1} = 3^n.$$

Vì vậy

$$y_{2n+1} = 2 \cdot 3^{n-1}, y_{2n} = 3^n, u_{2n+1} = 4 \cdot 3^{n-1}, u_{2n} = 2 \cdot 3^{n-1}, x_{2n+1} = 14 \cdot 3^{n-1}, x_{2n} = 8 \cdot 3^{n-1}$$

và $x_1 = 5$. □

Ví dụ 2.12. Có bao nhiêu số có n chữ số từ tập các số $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ thỏa mãn hai chữ số liên tiếp hơn kém nhau 1 đơn vị.

Lời giải. Gọi A_n là số các số có n chữ số mà tận cùng là 0 hoặc 4; B_n là số các số có n chữ số mà tận cùng là 1 hoặc 2; C_n là số các số có n chữ số mà tận cùng là 3. Với n là số nguyên dương ta có:

- Mỗi số thuộc có thể tạo ra từ một số thuộc bằng cách xóa một số ở cuối nên $A_{n+1} = B_n$
- Mỗi số thuộc có thể tạo ra 1 số thuộc bằng cách thêm 1 (trong trường hợp tận cùng bằng 0) hoặc thêm 3 (nếu tận cùng bằng 4) và mỗi số thuộc có thể tạo ra một số thuộc bằng cách thêm 1 hoặc 3 vào cuối. Do đó: $B_{n+1} = A_n + 2C_n$
- Mỗi số thuộc có thể tạo ra một số thuộc bằng cách xóa số 2 ở cuối, vì vậy $C_{n+1} = B_n$

Chúng ta cần tính $S_n = A_n + B_n + C_n$. Công việc này khá đơn giản ! □

Ví dụ 2.13 (Romanian MO 1998). Gọi A_n là tập hợp các chữ có độ dài bằng n được thành lập từ các chữ cái a, b, c sao cho không có hai phần tử liên tiếp cùng bằng a hoặc cùng bằng b . Gọi B_n là tập hợp các chữ có độ dài bằng n , được thành lập từ các chữ a, b, c mà không có ba phần tử liên tiếp nào đôi một phân biệt. Chứng minh rằng $\text{card}(B_n) = 3 \cdot \text{card}(A_n)$

Lời giải. Gọi X_n, Y_n, Z_n lần lượt là các tập con của có tận cùng bởi chữ a, b, c tương ứng.

Đặt $u_n = \text{card}(U_n)$. Với mỗi số nguyên n ta có các hệ thức sau đây:

$$\begin{aligned} |A_n| &= x_n + y_n + z_n \\ x_{n+1} &= y_n + z_n; \\ y_{n+1} &= x_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n + z_n = |A_n| \end{aligned}$$

Do đó $|A_{n+2}| = x_{n+2} + y_{n+2} + z_{n+2} = 2x_{n+1} + 2y_{n+1} + 3z_{n+1} = 2|A_{n+1}| + |A_n|$ và $A_1 = 3, A_2 = 7$.

Gọi S_n là tập con của có tận cùng bởi chữ aa, bb, cc . Đặt $T_n = B_n - S_n$ thì T_n là tập hợp các số trong có tận cùng bởi ab, ac, ba, bc, ca, cb . Ta thu được các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} |B_n| &= s_n + t_n \\ |B_{n+1}| &= 3s_n + 2t_n \\ s_{n+1} &= |B_n| \end{aligned}$$

Vì vậy $|B_{n+2}| = s_{n+2} + t_{n+2} = 2|B_{n+1}| + |B_n|$ và $B_2 = 9, B_3 = 21$.

Thành thử ta có điều phải chứng minh. $\square$

Việc giải bài toán trên thực chất là đi giải hai bài toán nhỏ về phép đếm và cả hai bài toán ấy đều giải bằng cách thiết lập các dãy truy hồi lồng nhau.

Ví dụ 2.14 (Vietnam MO 2009). Cho số nguyên dương n . Kí hiệu T là tập hợp gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập con S của T có tính chất: trong S không tồn tại các số a, b mà $|a - b| \in \{1, n\}$? (Tập rỗng được coi là tập có tính chất nêu trên).

Lời giải. Trước hết ta có bài toán

Cho 2 hàng điểm $A_1; A_2; A_3; \dots; A_n$ ở trên và $B_1; B_2; \dots; B_n$ ở dưới.

Các cặp điểm $(A_i; A_{i-1}); (B_i; B_{i-1}); (A_i; B_i)$ được nối với nhau, ngoài ra A_n và cũng được nối với nhau. Tính số cách chọn ra một số điểm mà không có hai điểm nào được nối với nhau.

Gọi S_n là số cách chọn thỏa mãn điều kiện trên, nhưng có thể chứa cả A_i và B_i . Gọi x_n là số cách chọn thỏa mãn nhưng không chứa điểm nào trong 4 điểm A_i, A_n, B_i, B_n . Gọi y_n là số cách chọn thỏa mãn nhưng chứa đúng 1 điểm trong 4 điểm trên. Gọi z_n là số cách chia thỏa mãn nhưng chứa đúng 2 điểm A_i, A_n hoặc B_i, B_n . Gọi t_n là số cách chọn thỏa mãn nhưng chứa đúng 2 điểm A_i, B_n , hoặc B_i, A_n .

Khi đó ta có $S_n = x_n + y_n + z_n + t_n$ và số cách chọn thỏa mãn bài toán là $S_n - \frac{t_n}{2}$.

Dễ dàng lập công thức truy hồi cho S_n là $S_0 = 1, S_1 = 3, S_{n+1} = 2S_n + S_{n-1}$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} x_n &= S_{n-2}; \\ y_n &= 2(S_{n-1} - S_{n-2}); \\ z_n &= t_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2}; \\ t_n &= z_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} z_n + t_n &= S_n - S_{n-2} - 2(S_{n-1} - S_{n-2}) = 2S_{n-2}; \\ z_n - t_n &= -(z_{n-1} - t_{n-1}); \\ t_n &= S_{n-2} + (-1)^n. \end{aligned}$$

Do đó $S_n - \frac{1}{2}t_n = \frac{2S_n - S_{n-2} + (-1)^{n-1}}{2}$.

Cuối cùng ta thu được kết quả là

$$\frac{(5 + 4\sqrt{2}) (1 + \sqrt{2})^{n-1} + (5 - 4\sqrt{2}) (1 - \sqrt{2})^{n-1} + 2 (-1)^{n-1}}{4}.$$

Trở lại bài toán nếu coi điểm A_i được gán với số $n + i$ và điểm B_i được gán với số i thì ta có kết quả của bài toán gốc. □

3 Bài tập áp dụng

Để kết thúc bài viết này chúng tôi xin nêu ra một số bài toán đếm áp dụng phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi

Bài toán 3.1. Xét tất cả các chuỗi gồm n kí tự từ tập hợp $\{0; 1; 2; 3\}$. Có bao nhiêu số có số chẵn các số:

1. 0

2. 0 và 1

Bài toán 3.2. Tìm số xâu nhị phân có độ dài bằng n và không có hai số 0 liên tiếp.

Bài toán 3.3 (ĐHQG Tp.HCM TST 2009). Cho số nguyên dương n . Có bao nhiêu số chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc $\{3; 4; 5; 6\}$?

Bài toán 3.4. Chia một hình vuông làm n phần bằng nhau, ta được hình vuông nhỏ; trong mỗi hình vuông nhỏ kẻ các đường chéo. Hỏi trong hình đó có tất cả bao nhiêu hình vuông.

Bài toán 3.5. Cho $A = \{1; 2; 3; \dots; n\}$, $\forall n \geq 4$. Tìm số các tập con B của A có hiệu hai phần tử bất kì khác 1 và 3. Tập rỗng và tập có 1 phần tử được coi là các tập thỏa mãn điều kiện đó.

Bài toán 3.6 (St.Petersburg City MO 1995). Trên đường tròn cho 999 điểm. Có bao nhiêu cách đánh cho mỗi điểm bởi các chữ cái A, B và C sao cho trên cung nằm giữa hai điểm được viết cùng chữ cái, có số chẵn các chữ cái khác nhau từ hai chữ cái đó.

Bài toán 3.7 (Poland MO 1995-Thụy Sĩ 2006). Cho số nguyên dương n . tìm số tập con của tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 2n\}$ sao cho không tồn tại hai phần tử $x, y \in A$ thỏa mãn $x + y = 2n + 1$.

Bài toán 3.8 (IMO Longlist 1992). Cho a_n là ước số lớn nhất của n mà không chia hết cho 3. Xét dãy số $s_0 = 0$, $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Đặt A_n là số các tổng s_k ($0 \leq k \leq 3^n, k \in \mathbb{N}_0$) chia hết cho 3. Chứng minh hệ thức

$$A_n = 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right), \forall n \in \mathbb{N}$$

Bài toán 3.9. Tìm số số có n chữ số $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ mà $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n \vdots 2$.

Bài toán 3.10. Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu dãy số $(a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2n})$ thỏa mãn các điều kiện sau

- 1/ $a_1 \in \{-1; 1\}$, $\forall n = 1; 2; \dots; 2n$
- 2/ $\left| \sum_{i=2k-1}^{2l} a_i \right| \geq 2$, $\forall l; k$ thỏa mãn $1 \leq k \leq l \leq n$.

Bài toán 3.11. Tìm số tập con của tập hợp n số nguyên dương đầu tiên sao cho mỗi tập có đúng 3 phần tử và tổng các phần tử chia hết cho 3.

Bài toán 3.12 (USA MO 1990). Cho n là một số nguyên dương. Tìm số các số nguyên dương mà trong biểu diễn hệ cơ số n của nó có các chữ số phân biệt và thỏa mãn tính chất: trừ chữ số đầu tiên bên trái, mọi chữ số đều khác các chữ số nào đó bên trái là ± 1 .

Bài toán 3.13. Cho số nguyên dương n . Đặt $S = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, với $x_i, y_i \in \{0; 1\}$. Gọi a_n, b_n lần lượt là bộ $2n$ -số $(x_1; \dots; x_n; y_1; \dots; y_n)$ có S lẻ và chẵn tương ứng. Chứng minh hệ thức

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Bài toán 3.14. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O được nối với các đỉnh của lục giác bởi các bán kính. Đếm số đường đi độ dài n xuất phát từ O và kết thúc ở O .

Bài toán 3.15 (IMO Shortlist-1996). Cho bảng ô vuông $n \times n$, $n > 1$. Hỏi có bao nhiêu cách đánh dấu các ô vuông trong mỗi hình vuông 2×2 có đúng 3 ô vuông được đánh dấu? (hai cách đánh dấu được coi là khác nhau nếu có một ô vuông nào đó mà trong cách này thì được đánh dấu còn trong cách kia thì không).

Bài toán 3.16. Tìm số hoán vị không có điểm cố định của tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; n\}$.

Bài toán 3.17 (ĐHKHTN Hà Nội TST 2010). Tìm số hoán vị $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ của $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1. $a_i \neq i$ với mọi $i = 1; 2; \dots; n$.
2. $a_{i+1} - a_i \leq 1$ với mọi $i = 1; 2; \dots; n - 1$.

Bài toán 3.18. Tìm số các số nguyên dương N thỏa mãn các điều kiện:

1. N có 2012 chữ số;
2. Tất cả các chữ số của N là số lẻ;
3. Hiệu của hai số liên tiếp bất kì của N luôn bằng 2.

Bài toán 3.19 (Vietnam MO 1977). Trong mặt phẳng cho n đường tròn. Hai đường tròn bất kì cắt nhau tại hai điểm và không có điểm nào nằm trên 3 đường tròn. Hỏi có bao nhiêu miền mặt phẳng bị chia bởi các đường tròn nói trên.

Bài toán 3.20. Tìm số tập con của tập $\{1; 2; \dots; n\}$ sao cho trong mỗi tập con chứa ít nhất hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.

Bài toán 3.21 (Bà Rịa - Vũng Tàu 2010). Cho số nguyên dương n . Có bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số mà trong mỗi số, các chữ số đều lớn hơn 1 và không có hai chữ số khác nhau cùng nhỏ hơn 7 đứng liền kề nhau.

Bài toán 3.22 (Mở rộng Vietnam MO 2003A - Tạp chí THTT). Tìm số hoán vị $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ của tập $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thỏa mãn $1 \leq |a_i - i| \leq 2$, $\forall i = 1; 2; \dots; n$.

Bài toán 3.23. *Tìm số tập con của tập hợp $\{1; 2; \dots; n\}$ mà hai phần tử bất kì hơn kém nhau ít nhất 3 đơn vị.*

Bài toán 3.24 (Canadian MO 2009). *Cho hình chữ nhật kích thước $3 \times n$ ô. Một quân xe xuất phát từ ô góc trên bên trái và đi đến ô góc dưới bên trái sao cho đường đi của nó tạo thành một đường gấp khúc không tự cắt. Hỏi có bao nhiêu cách đi như thế?*

Bài toán 3.25 (Bulgarian MO 1999). *Có bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số mà trong biểu diễn nhị phân của chúng không có ba chữ số liên tiếp bằng nhau?*

Bài toán 3.26. *Có bao nhiêu cách xếp 8 quân xe lên bàn cờ vua sao cho không có quân xe nào nằm trên đường chéo chính (đường chéo nối góc trên bên trái và góc dưới bên phải) và không có quân xe nào có thể ăn các quân xe khác?*

Tài liệu

- [1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và Toán rời rạc*, NXB Giáo Dục, 2008.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Toán Rời rạc và một số vấn đề liên quan*, Tài liệu bồi dưỡng giáo viên hè 2007, Trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.
- [3] Titu Andreescu-Zuming Feng, *A path to combinatorics for undergraduates*, Birkhauser.
- [4] Iiri Herman-Radan Kucera-Jaromir Simsa, *Counting and Configurations*, Canadian Mathematical Society.
- [5] Titu Andreescu-Zuming Feng, *102 Combinatorial problems from the training of the USA IMO team*, Birkhauser 2002.
- [6] Titu Andreescu-Kiran S.Kedlaya-Paul Zeitz, *Mathematical Contests 1995-1996. Olympiad Problems from Around the World with Solutions*, American Mathematics Competitions 1997.
- [7] Titu Andreescu-Kiran S.Kedlaya, *Mathematical Contests 1996-1997. Olympiad Problems from Around the World with Solutions*, American Mathematics Competitions 1998.
- [8] Titu Andreescu-Kiran S.Kedlaya, *Mathematical Contests 1997-1998. Olympiad Problems from Around the World with Solutions*, American Mathematics Competitions 1999.
- [9] Titu Andreescu-Zuming Feng, *Mathematical Olympiad. Problems from Around the World 1998-1999*, Mathematical Association of America 2000.
- [10] Titu Andreescu-Zuming Feng, *Mathematical Olympiad. Problems from Around the World 1999-2000*, Mathematical Association of America 2002.
- [11] Titu Andreescu-Zuming Feng-George Lee, *Mathematical Olympiad. Problems from Around the World 2000-2001*, Mathematical Association of America 2003.
- [12] Titu Andreescu-Răzvan Gelca, *Putnam and Beyond*, Springer.
- [13] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer.
- [14] ME Kuczma- E Windischbacher, *Polish and Austrian Mathematical Olympiad 1981-1995*, An Australian Mathematics trust publication.
- [15] Trần Nam Dũng (chủ biên), *Chuyên đề toán học số 8*, Trường PTNK-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.
- [16] Le Hai Chau-Le Hai Khoi, *Selected Problems of the Vietnamese Mathematical Olympiad (1962-2009)*, World Scientific.
- [17] Dusan Diukic- Vladimir Jankovic- Ivan Matic- Nikola Petrovic, *The IMO Compendium A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads. 1959-2004*, Springer.
- [18] Tạp chí *Toán học và tuổi trẻ* - Việt Nam, *Cruz* - Canada, **AMM - USA**

Tính toán một số lớp tích phân xác định dạng đặc biệt

Lê Hồ Quý, Trường THPT Duy Tân, Kon Tum

Tóm tắt nội dung

Trong nhiều bài toán việc tìm nguyên hàm rất phức tạp và khó khăn thậm chí không tìm được nguyên hàm dưới dạng hiện. Vì vậy, nhu cầu tính các tích phân xác định khi chưa tường minh nguyên hàm tương ứng là một bài toán cần được khảo sát chi tiết. Trong những trường hợp đó, nếu biết dựa vào những tính chất đặc biệt của hàm dưới dấu tích phân và những biến đổi thích hợp, ta có thể tính được một số dạng tích phân xác định.

1 Tích phân đối với hàm chẵn và lẻ

Tính chất 1.1. Nếu hàm số $y = f(x)$ lẻ, liên tục trên $[-a; a]$, với $a > 0$ thì

$$I = \int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Chứng minh. Do $f(x)$ liên tục trên $[-a; a]$ nên

$$I = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

Đặt $x = -t$ thì $dx = -dt$. Khi đó

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx = - \int_0^a f(x)dx$$

(Do $f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-x) = -f(x)$).

Vậy

$$I = - \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Ví dụ 1.1. Tính tích phân

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\cos 4x + \sin \frac{x}{2} \sin x \right) \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x) = \left(\cos 4x + \sin \frac{x}{2} \sin x \right) \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Ta thấy $f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ và

$$\begin{aligned} f(-x) &= \left[\cos(-4x) + \sin \frac{-x}{2} \sin(-x) \right] \ln \frac{1-x}{1+x} \\ &= \left(\cos 4x + \sin \frac{x}{2} \sin x \right) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} \\ &= -\left(\cos 4x + \sin \frac{x}{2} \sin x \right) \ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ và là hàm số lẻ nên theo tính chất 1.1, ta có $I = 0$.

Tính chất 1.2. Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-a; a]$, với $a > 0$ thì

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Chứng minh. Chứng minh tương tự như tính chất 1.1, chú ý $f(-x) = f(x)$.

Ví dụ 1.2 (Đề thi tuyển sinh vào ĐH Lâm nghiệp - 1999). Tính tích phân

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x^4 + \sin x}{x^2 + 1} dx.$$

Lời giải. Ta có

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx = I_1 + I_2.$$

Để thấy $\frac{\sin x}{x^2 + 1}$ là hàm số lẻ, liên tục trên $[-1; 1]$ theo tính chất 1.1 ta có $I_2 = 0$;

còn $\frac{x^4}{x^2 + 1}$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-1; 1]$ nên theo tính chất 1.2, ta có

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 + 1} dx = 2 \left[\int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

Tính chất 1.3. Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $D \subset \mathbb{R}$ thì với $\forall a \in D$ ta luôn có

$$I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx, \text{ với } a > 0 \text{ và } 0 < b \neq 1.$$

Chứng minh. Ta có

$$I = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{b^x + 1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx$$

Đặt $x = -t$ thì $dx = -dt$. Khi đó

$$\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = - \int_a^0 \frac{f(-t)}{b^{-t} + 1} dt = \int_0^a \frac{f(-t)b^t}{b^t + 1} dt = \int_0^a \frac{f(-x)b^x}{b^x + 1} dx = \int_0^a \frac{f(x)b^x}{b^x + 1} dx.$$

Vậy

$$I = \int_0^a \frac{f(x)b^x}{b^x + 1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a \frac{(b^x + 1)f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx.$$

Ví dụ 1.3. Tính tích phân

$$I = \int_{-2}^2 \frac{x \ln (x + \sqrt{1 + x^2})}{(2011^x + 1)\sqrt{1 + x^2}} dx$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{x \ln (x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Dễ thấy $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-2; 2]$. Từ tính chất 1.3, ta được

$$I = \int_0^2 \frac{x \ln (x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

Để tính tích phân I , ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \\ v = \sqrt{1 + x^2} \end{cases}$$

Vậy

$$I = \sqrt{1 + x^2} \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) \Big|_0^2 - \int_0^2 dx = \sqrt{5} \ln (2 + \sqrt{5}) - 2.$$

Nhận xét 1.1. Từ các tính chất riêng lẻ 1.1, 1.2 và 1.3, dẫn đến một tính chất chung sau đây

Tính chất 1.4. Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên $[-a; a]$, với $a > 0$ thì

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx$$

Chứng minh. Do $f(x)$ liên tục trên $[-a; a]$ nên

$$I = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

Đặt $x = -t$ thì $dx = -dt$. Khi đó

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx$$

Vậy

$$I = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a (f(x) + f(-x))dx.$$

Ví dụ 1.4 (Đề thi Olympic Sinh viên Toàn quốc - 2011). Tính tích phân

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x+x^2+\sqrt{1+3x^2+x^4}}.$$

Lời giải. Xét $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+\sqrt{1+3x^2+x^4}}$, với $x \in [-1, 1]$.

Ta nhận thấy $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f(x) + f(-x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Từ đó, sử dụng tính chất 1.4, ta có

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 (f(x) + f(-x))dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

2 Tích phân đối với hàm tuần hoàn

Trong mục này ta chỉ xét các hàm tuần hoàn cộng tính. Đối với các hàm số tuần hoàn nhân tính cần chuyển đổi qua hàm tuần hoàn cộng tính bằng phép lôgarit hóa các biểu thức tương ứng của biến số.

Ta nhắc lại định nghĩa hàm tuần hoàn.

Định nghĩa 2.1. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có một số $T > 0$ sao cho với mọi x thuộc miền xác định D_f của hàm số, ta luôn có

- 1) $x \pm T$ cũng thuộc miền xác định của hàm số,
- 2) $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Số T ($T > 0$) được gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn. Chu kỳ nhỏ nhất (nếu tồn tại) được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm số đã cho.

Tính chất 2.1. Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ T , xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thì

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Chứng minh. Đặt

$$I_1 = \int_a^{a+T} f(x)dx, \quad I_2 = \int_0^T f(x)dx, \quad I_3 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

Ta có

$$I_1 = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$

Đổi biến $x = t + T$ đối với tích phân $\int_T^{a+T} f(x)dx$ được $I_1 = I_2$. Chọn $a = -\frac{T}{2}$ ta được $I_1 = I_3$.

Ví dụ 2.1. Tính tích phân

$$I = \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx.$$

Lời giải. Dễ thấy $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\sin 2x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T = \pi$, do đó theo tính chất 2.1, ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos^2 x (1 + \tan^4 x)}$$

Ta tính

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos^2 x (1 + \tan^4 x)}$$

Đặt $t = \tan x$, ta có $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đổi cận: Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; khi $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$. Vậy nên

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t dt}{1 + t^4} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(t^2)}{1 + t^4} = \frac{\pi}{8}.$$

Do đó

$$I = 2I_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 2.2 (Đề thi Olympic Sinh viên Toàn quốc - 2007). Tính tích phân

$$I = \int_0^{2\pi} \ln (\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) dx.$$

Lời giải. Nhận xét rằng $f(x) = \ln (\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$ là hàm liên tục, tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$. Từ tính chất 2.1 ta được $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Mặt khác, do $f(x)$ là hàm số lẻ nên theo tính chất 1.1 ta được $I = 0$.

3 Tích phân một số dạng với đặc trưng hàm đặc biệt

Tính chất 3.1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thì

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

Chứng minh. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ thì $x = \frac{\pi}{2} - t$ và $dx = -dt$. Khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

Ví dụ 3.1. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Lời giải. Theo tính chất 3.1, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \\ \Rightarrow 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{\pi}{4}$.

Tính chất 3.2. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = f(a + b - x)$ với mọi $x \in [a; b]$, thì ta luôn có

$$1) I = \int_a^b f(x) dx = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx.$$

$$2) J = \int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{Đặc biệt: } J_1 = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

Chứng minh. Ta có

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx.$$

Đối với tích phân thứ hai, đặt $x = a + b - t$, ta được

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = - \int_{\frac{a+b}{2}}^a f(a+b-t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(a+b-t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$$

Do vậy, tính chất 3.2 1) được chứng minh.

Bằng cách đổi biến tương tự, đặt $t = a + b - x$ thì $dt = -dx$ và

$$\begin{aligned} \int_a^b xf(x)dx &= - \int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)dt = \int_a^b (a+b-t)f(t)dt \\ &= (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx \end{aligned}$$

và tính chất 3.2 2) được chứng minh. Cho $a = 0, b = \pi$ ta có J_1 .

Ví dụ 3.2. Tính tích phân

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{2 + \cos x} = \frac{1}{2 + \cos(2\pi - x)}$$

Từ tính chất 3.2, ta suy ra

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} \right)$$

Sử dụng công thức $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$, ta có

$$2 + \cos x = \frac{1 + 3 \cot^2 \frac{x}{2}}{1 + \cot^2 \frac{x}{2}}.$$

Ta tính

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ ($0 \leq t \leq 1$), ta có

$$I_1 = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Ta tính

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

Đặt $u = \cot \frac{x}{2}$ ($0 \leq u \leq 1$), ta được

$$I_2 = 2 \int_0^1 \frac{du}{1 + 3u^2} = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{du}{u^2 + \frac{1}{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Vậy

$$I = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 3.3. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \sin^2 x}.$$

Lời giải. Theo tính chất 3.2, ta có

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{-d(\cos x)}{2 - \cos^2 x} = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \cos x}{\sqrt{2} - \cos x} \Big|_0^{\pi} = \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Bài tập

1. Tính các tích phân sau

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ (Học viện Kỹ thuật Mật mã - 1999);

b) $\int_0^{2\pi} \sin(2002x + \sin x) dx$ (Đề thi Olympic Sinh viên toàn quốc-2002);

c) $\int_{-1}^1 \frac{x^6 + \tan x}{x^2 + 1} dx$;

d) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx$ (ĐH Mỏ - Địa chất - 1999);

e) $\int_0^{4\pi} \frac{\sin^7 3x \cdot \cos^8 5x}{1 + \cos^{10} 7x} dx$;

f) $\int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{\cos^2(\sin x)} - \tan^2(\cos x) \right) dx$;

g) $\int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$ (Học viện Ngân hàng - 1998);

h) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

2. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2 \cos 2x}$. Tính

$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$ (ĐHSP Hà Nội 2 - 1998).

Tài liệu

- [1] Nguyễn Thủy Thanh (2010), *Phương pháp giải các dạng toán cơ bản, Tập 2, Giải tích*, NXB Giáo Dục.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (2004), *Một số vấn đề chọn lọc về tích phân*, NXB Giáo Dục.
- [3] Tô Văn Ban (2005), *Giải tích, Những bài tập nâng cao*, NXB Giáo Dục.
- [4] Nguyễn Văn Mậu (2007), *Nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [5] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Thuỷ Thanh (2002), *Giới hạn dãy số và hàm số*, NXB Giáo dục.
- [6] Nguyễn Văn Mậu, Đặng Huy Ruận, Nguyễn Thuỷ Thanh (2000), *Phép tính vi phân và tích phân hàm một biến*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [7] Nguyễn Văn Mậu (2005), *Bất đẳng thức, Định lý và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [8] Trần Phương (2006), *Tuyển tập các chuyên đề và kỹ thuật tính Tích phân*, NXB Tri Thức.
- [9] Trịnh Tuấn (2008), "Sử dụng một số kết đẹp để tính tích phân", *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* (số 367), tr. 12-13,30.
- [10] Đặng Thanh Hải, Trần Tuyết Thanh (2010), "Đổi biến trong tích phân hàm lượng giác", *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* (số 391), tr. 8-9,12.
- [11] Lê Hồ Quý (2011), "Cách tính tích phân một số hàm số vô tỉ", *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* (số 403), tr. 5-7.
- [12] James Stewart (2008), *Calculus Early Transcendentals, 6e*, Thomson.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Nguyễn Anh Tuấn, Trường THPT Chuyên Bắc Giang

Danh mục các từ viết tắt

1. Vt: Vế trái của phương trình.
Vt²: Bình phương của vế trái phương trình.
2. Vp: Vế phải của phương trình.
Vp²: Bình phương của vế phải phương trình.
3. Vt(1): Vế trái của phương trình (1).
4. Vp(1): Vế phải của phương trình (1).
5. Đk, đk: Điều kiện.
6. BĐT: Bất đẳng thức.
HSG, HSG: Học sinh giỏi.
7. VMO, VMO: Thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 12 THPT của Việt Nam.
IMO: Thi Olympic Toán học quốc tế.
8. HD: Hướng dẫn.
9. Quy ước: Nghiệm của tất cả các Ví dụ và Bài toán trong Chuyên đề được xét trong tập số thực R.

Lời mở đầu

Toán học có một vẻ đẹp lôi cuốn và quyến rũ, ai đã đam mê thì mãi mãi đam mê... Trong vẻ đẹp đầy huyền bí đó thì các bài toán liên quan đến Hệ phương trình – có nét đẹp thật sự xao xuyến và quyến rũ!

Có lẽ vì lý do đó mà trong các kì thi chọn HSG Quốc gia lớp 12 THPT (VMO) của chúng ta, bài toán liên quan đến Hệ phương trình thường có mặt để thách thức các nhà Toán học tương lai với dung nhan "muôn hình, muôn vẻ". Bài toán giải Hệ phương trình cũng thường xuyên xuất hiện trong các kì thi của học sinh THCS và THPT như thi chọn HSG cấp tỉnh, thi chọn HSG cấp thành phố, thi chọn HSG cấp huyện, thi chọn HSG cấp trường, thi Đại học, thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên, hay bài toán đó còn có trong đề thi chọn giáo viên dạy giỏi cấp tỉnh ở vòng thi lý thuyết, ...

Chuyên đề: ***“Một số phương pháp giải Hệ phương trình cho học sinh giỏi”***, tôi viết với mong muốn phần nào giúp các Thầy cô giáo dạy Toán, các em học sinh phổ thông cũng như các em học sinh trong các đội tuyển thi chọn học sinh giỏi Toán có thể tìm thấy nhiều điều bổ ích và nhiều điều thú vị đối với dạng toán này. Trong Chuyên đề có cả những bài với cấp độ giải trí cho học sinh giỏi (rèn luyện phản xạ nhanh).

Đối với việc giải Hệ phương trình thì hầu hết các phương pháp giải, các phương pháp biến đổi hay đều có trong cuốn Chuyên đề này. Cách phân tích để nhận dạng một Hệ phương trình và chọn lựa phương pháp giải thích hợp là khó và đa dạng. Để có khả năng này chúng ta phải tìm cách giải và tự sáng tác nhiều Hệ phương trình để tự rút ra những nhận xét, kinh nghiệm và hay hơn nữa là một vài thuật giải toán, cũng như lưu ý rằng một bài toán có thể có nhiều cách giải khác nhau.

Tôi viết Chuyên đề này chỉ với những Ví dụ và Bài tập về giải Hệ phương trình cho học sinh giỏi (không chứa tham số). Tôi hy vọng rằng Chuyên đề sẽ để lại trong lòng Thầy cô và các em học sinh một ấn tượng tốt đẹp. Với mỗi Ví dụ trong từng Phương pháp giải, người đọc có thể tự sáng tác cho mình những bài toán với những con số mà mình yêu thích.

Tuy nhiên, Chuyên đề chắc sẽ không thể tránh khỏi những điều không mong muốn. Tôi rất mong nhận được sự động viên và những ý kiến đóng góp chân thành của Quý Thầy cô và các em học sinh để Chuyên đề tiếp tục được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Bắc Giang, ngày 25 tháng 4 năm 2012

Chương 1**MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH****I.1. Ví dụ mở đầu****1. Ví dụ 1 (2010 – VMO)**

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^4 - y^4 = 240 & (1) \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) & (2) \end{cases}$$

HD: *Cách 1*

Lấy vế với vế của (1) trừ vế với vế của 4 x (2) và lấy vế với vế của (1) trừ vế với vế của 8 x (2)), ta được hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 16 = y^4 - 8y^3 + 48y^2 - 128y + 256 \\ x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x = y^4 - 16y^3 + 96y^2 - 256y + 240 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2x + 4)^2 = (y^2 - 4y + 16)^2 \\ (x^2 - 4x + 4)^2 = (y^2 - 8y + 16)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 4 = y^2 - 4y + 16 \\ x^2 - 4x + 4 = y^2 - 8y + 16 \end{cases} \text{ (do các biểu thức ở các vế đều dương)} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y^2 = 12 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ x = -4 \\ y = -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = (4; 2), (-4; -2)$.

Cách 2

Lấy vế với vế của (1) trừ vế với vế của 8 x (2), ta được

$$\begin{aligned} & x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = y^4 - 16y^3 + 96y^2 - 256y + 256 \\ & \Leftrightarrow (x - 2)^4 = (y - 4)^4 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y - 4 \\ x - 2 = 4 - y \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ x = 6 - y \end{cases} \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (1) rồi biến đổi tiếp, ta được hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = (4; 2), (-4; -2)$.

Cách 3

Đặt $y = 2t$, thay vào hệ phương trình và viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} x^4 + 16 = 16(t^4 + 16) \\ x^3 - 3x^2 + 4x = 16(t^3 - 3t^2 + 4t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^4 + 16)(t^3 - 3t^2 + 4t) = (t^4 + 16)(x^3 - 3x^2 + 4x)$$

Dễ thấy, nếu $(x; t)$ là nghiệm của hệ thì $xt \neq 0$ nên ta chia hai vế của phương trình trên cho x^2t^2 thì được

$$(x^2 + \frac{16}{x^2})(t - 3 + \frac{4}{t}) = (t^2 + \frac{16}{t^2})(x - 3 + \frac{4}{x}) \quad (1')$$

Đặt $u = x + \frac{4}{x}$ và $v = t + \frac{4}{t}$ thì ta có phương trình $(u^2 - 8)(v - 3) = (v^2 - 8)(u - 3)$

$$\Leftrightarrow u^2v - v^2u - 3(u^2 - v^2) + 8(u - v) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(uv - 3(u + v) + 8) = 0 \quad (2').$$

Từ (1') suy ra x và t cùng dấu.

Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta dễ dàng suy ra $\begin{cases} u \geq 4, v \geq 4 \\ u \leq -4, v \leq -4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - 3 \geq 1, v - 3 \geq 1 \\ u - 3 \leq -7, v - 3 \leq -7 \end{cases}$$

Suy ra $uv - 3(u + v) + 8 = (u - 3)(v - 3) - 1 \geq 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $u = v = 4$.

Từ lý luận trên và từ (2') ta suy ra $u = v$, từ đó suy ra $\begin{cases} x = t \\ x = \frac{4}{t} \end{cases}$.

Nếu $x = t$ thì (1') trở thành $t^4 + 16 = 16(t^4 + 16)$ (vô nghiệm).

Nếu $x = \frac{4}{t}$ thì (1') trở thành $\frac{256}{t^4} + 16 = 16(t^4 + 16) \Leftrightarrow t^8 + 15t^4 - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow (t^4 - 1)(t^4 + 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Từ đó ta được hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = (4; 2), (-4; -2)$.

2. Ví dụ 2 (Hội thi Khu vực Duyên Hải & Đồng Bằng Bắc Bộ năm 2012)

2.1 Đề Toán dành cho học sinh Lớp 10

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 - y^3 - 3y^2 = 9 & (1) \\ x^2 + y^2 = x - 4y & (2) \end{cases}$$

HD: Cách 1 (Theo đáp án)

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3y^2 = 9 \\ 3(x^2 + y^2) = 3(x - 4y) \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 - 3y^2 - 3(x^2 + y^2) = 9 - 3(x - 4y)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+2)^3 \Leftrightarrow x-1 = y+2 \Leftrightarrow x = y+3$$

Thế vào phương trình (2), ta được $2y^2 + 9y + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-9 - \sqrt{33}}{4} \text{ hoặc } y = \frac{-9 + \sqrt{33}}{4}.$$

Với $y = \frac{-9 - \sqrt{33}}{4}$ thì $x = 3 + \frac{-9 - \sqrt{33}}{4} = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}$.

Với $y = \frac{-9 + \sqrt{33}}{4}$ thì $x = 3 + \frac{-9 + \sqrt{33}}{4} = \frac{3 + \sqrt{33}}{4}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm

$$(x; y) = \left(\frac{3 - \sqrt{33}}{4}; \frac{-9 - \sqrt{33}}{4} \right), \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{4}; \frac{-9 + \sqrt{33}}{4} \right).$$

Cách 2

Hệ tương đương với
$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + xy = x - 4y + xy \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-y)(x-4y+xy) - 3y^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 - 3xy + xy(x-y) - 9 = 0.$$

Đặt $\begin{cases} x-y = z \\ xy = t \end{cases}$, coi phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn z , có $\Delta = (t+6)^2$

Từ đó suy ra $z = 3$ hoặc $z = t - 3$.

Cách 3

Hệ tương đương với
$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + xy = x - 4y + xy \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-y)(x-4y+xy) - 3y^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x-y-3)(x-y+xy+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ x(y+1) = y - 3 \end{cases}$$

Lý luận dễ được $x = \frac{y-3}{y+1}$ dẫn đến hệ không có nghiệm trong trường hợp này.

Cách 4

Ta thấy (2) tương đương với

$$(x^2 + y^2)(x-y) = (x-4y)(x-y) \text{ (do } x=y \text{ không là nghiệm của hệ)}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 = x^2 + 4y^2 - 5xy - xy^2 + x^2y, \text{ thay vào (1) ta được}$$

$$x^2 + y^2 - 5xy - xy^2 + x^2y = 9$$

$$\Leftrightarrow (y+1)x^2 - (y^2 + 5y)x + y^2 - 9 = 0.$$

Nếu $y = -1$ thì $x = 2$, không thỏa mãn.

Xét $y \neq -1$, phương trình được coi là ẩn x có $\Delta = (y^2 + 3y + 6)^2$

Từ đó suy ra
$$\begin{cases} x = y + 3 \\ x(y+1) = y - 3 \end{cases}.$$

Nhận xét: Tất cả những cách giải đưa về giải phương trình bậc hai một ẩn, khi tính Δ ra nháp là bình phương của một biểu thức thì trong lời giải ta biến đổi phương trình về phương trình tích ngay.

2.2 Đề Toán dành cho học sinh Lớp 11

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}.$$

HD: *Cách 1* (Theo đáp án)

Cộng vế với vế của hai phương trình trong hệ và sau khi rút gọn, ta được

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (1).$$

Trừ vế với vế của phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất và sau khi phân tích, ta được

$$(x-y)(x+y-2xy+7) = 0$$

Nếu $x-y=0$, thay $x=y$ vào một trong hai phương trình trong hệ ta giải được $x=y=2$ và $x=y=3$.

Nếu $x+y-2xy+7=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4} \quad (2).$

Đặt $a = x - \frac{5}{2}$, $b = y - \frac{5}{2}$ từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \\ (a+2)(b+2) = \frac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \\ 2ab + 4a + 4b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Trừ vế với vế của hai phương trình trong hệ ta có

$$(a-b)^2 - 4(a+b) = 1 \quad (3).$$

Cộng vế với vế của hai phương trình trong hệ ta có

$$(a+b)^2 + 4(a+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+b=-4 \end{cases}$$

Để thấy nếu $a+b=-4$ thì mâu thuẫn với (3) do đó $a+b=0$,
thay $a+b=0$ vào (3) ta có $a-b=\pm 1$.

Giải hệ $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=\pm 1 \end{cases}$, tìm được $(a;b) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Vậy hệ phương trình ban đầu có các nghiệm $(x;y) = (2;2), (3;3), (2;3), (3;2)$.

Cách 2

Từ hệ suy ra $6(x-y) - xy(x-y) + (x-y)(x+y) = xy(x-y) - (x-y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2xy = x+y+7 \end{cases}$$

Nếu $x=y$ thì xét đơn giản như trên.

Nếu $2xy = x+y+7$.

Xét $x = \frac{1}{2}$ thì $y = y+7 + \frac{1}{2}$ (loại).

Do đó $x \neq \frac{1}{2}$, suy ra $y = \frac{x+7}{2x-1}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } (y-1)(x^2+6) &= x(y^2+1) \Rightarrow \left(\frac{x+7}{2x-1} - 1\right)(x^2+6) = x\left(\left(\frac{x+7}{2x-1}\right)^2 + 1\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{(8-x)(x^2+6)}{2x-1} = \frac{5x(x^2+2x+10)}{(2x-1)^2} \\ &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 26x + 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x^2-x+4) = 0 \end{aligned}$$

Cách 3

$$\text{Hệ tương đương với } \begin{cases} (x-y)(x+y-2xy+7) = 0 & (1) \\ (x+y)^2 - 5(x+y) - 2xy + 12 = 0 & (2) \end{cases}$$

Nếu $x+y-2xy+7=0$ thì thay vào (2), ta được

$$(x+y)^2 - 6(x+y) + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$$

Cách 4

Nếu $x+y=2xy-7$ thì cộng vế với vế của (1) và (2), thay vào ta suy ra

$$x^2y^2 - 10xy + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=6 \\ xy=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

Cách 5

Nếu $x + y + 7 = 2xy$ thì cộng vế với vế của (1) và (2), thay vào ta suy ra $(x+y-3)^2 = 4$.

Nhận xét

Qua các Ví dụ trên ta thấy rằng có thể có nhiều cách để giải một Hệ phương trình nào đó. Mọi phương pháp đều chung một mục đích, đó là tìm cách biến đổi Hệ phương trình đã cho về Hệ phương trình hoặc Phương trình mà ta đã biết cách giải. Sau đây ta sẽ xét một số Phương pháp giải cụ thể.

I.2. Phương pháp biến đổi tương đương**I.2.1. Một số lưu ý**

Phương pháp này chủ yếu sử dụng các kỹ năng biến đổi đồng nhất, đặc biệt là kỹ năng phân tích nhằm đưa một phương trình trong hệ về dạng đơn giản (có thể tính x theo y hoặc ngược lại) rồi thế vào phương trình còn lại. Cũng có thể Hệ phương trình có nhiều ẩn, khi phân tích sẽ tính được ẩn nọ theo ẩn kia để thế lại.

1. Trong hệ có một phương trình bậc nhất với ẩn x hoặc y , khi đó ta tính y theo x hoặc x theo y .

2. Một phương trình trong hệ có thể đưa về dạng tích của các phương trình bậc nhất hai ẩn.

Đôi khi ta đặt ẩn phụ để cách trình bày gọn và tường minh hơn chứ đó không phải là bản chất của lời giải. Phương pháp cộng, thế coi như là Phương pháp biến đổi tương đương.

I.2.2. Một số ví dụ**1. Ví dụ 1**

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 & (1) \\ xy + x + 1 = x^2 & (2) \end{cases}$$

HD: Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn (2).

Nếu $x \neq 0$ thì từ (2) suy ra $y+1 = \frac{x^2-1}{x}$, thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} x^2 \frac{x^2-1}{x} \left(x + \frac{x^2-1}{x} \right) &= 3x^2 - 4x + 1 \\ \Leftrightarrow (x^2-1)(2x^2-1) &= (x-1)(3x-1) \\ \Leftrightarrow (x-1)(2x^3+2x-4x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} & \text{ (do } x \neq 0). \end{aligned}$$

Từ đó hệ có hai nghiệm là $(x;y) = (1;-1), \left(-2;-\frac{5}{2}\right)$.

2. Ví dụ 2

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$$

HD: Đk $x \geq 1; y \geq 0$.

Biến đổi (1) $\Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1) = 0$

$\Leftrightarrow x-2y-1=0$ (do từ điều kiện ta được $x+y > 0$).

$\Leftrightarrow x=2y+1$, thay vào (2) và biến đổi ta được

$$(y+1)(\sqrt{2y}-2)=0 \Leftrightarrow y=2 \text{ (do } y \geq 0 \text{)}.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (5;2)$.

3. Ví dụ 3

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) & (1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

HD: Biến đổi (2) thành $\Leftrightarrow (y+x-4)(y-5x-4)=0$, thế $y=4-x$ và $y=5x+4$ vào (1) ta sẽ có nghiệm của hệ.

$$\text{Nghiệm của hệ là } (x;y) = (0;4), (4;0), \left(-\frac{4}{5};0\right).$$

Nhận xét: Hai Ví dụ 2 và Ví dụ 3, ta có thể làm ra nháp coi phương trình đó là phương trình bậc hai ẩn x (Ví dụ 2), hoặc ẩn y (Ví dụ 3) để tính ẩn nọ theo ẩn kia, làm vào bài thì phân tích ra nhân tử.

4. Ví dụ 4

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$$

HD: Đk $x+y > 0$.

Phương trình (1) tương đương với

$$x^2 + y^2 + \frac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{x+y} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)\left(\frac{x^2+y^2}{x+y} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y-1=0 \text{ (do biểu thức còn lại dương).}$$

Thế $y = 1 - x$ vào (2), ta được hệ có nghiệm là $(x;y) = (1;0), (-2;3)$.

5. Ví dụ 5

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + y^3 = 91 & (1) \\ 4x^2 + 3y^2 = 16x + 9y & (2) \end{cases}$$

HD: Ta có (2) $\Leftrightarrow 12x^2 + 9y^2 = 48x + 27y$ (3).

Từ (1) và (3), ta được $(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) + (y^3 - 9y^2 + 27y - 27) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-4)^3 + (y-3)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-4 = -y+3$$

$$\Leftrightarrow x = 7 - y.$$

Thay vào (2), ta được $y^2 - 7y + 12 = 0$.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y) = (4;3), (3;4)$.

6. Ví dụ 6

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 - xy^2 + 2000y = 0 \\ y^3 - yx^2 - 500x = 0 \end{cases}.$$

$$\text{HD: Ta có hệ trên tương đương với } \begin{cases} x(x^2 - y^2) = -2000y & (1) \\ -y(x^2 - y^2) = 500x & (2) \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ và $(x; y) = (0; 0)$ là nghiệm của hệ.

$$\text{Nếu } x \neq 0 \text{ thì từ (1) và (2) suy ra } (-y) \left(\frac{-2000y}{x} \right) = 500x \Rightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ x^2 = 4y^2 \end{cases} \quad (3)$$

Ta có $x^2 - y^2 = 3y^2 > 0$ và (1) suy ra x, y trái dấu, kết hợp với (3) ta được $x = -2y \neq 0$.

Thay vào (1), ta được $3y^2 = 1000$.

Từ đó ta sẽ được hệ có ba nghiệm $(x; y) = (0; 0), \left(\frac{-20\sqrt{30}}{3}; \frac{10\sqrt{30}}{3} \right), \left(\frac{20\sqrt{30}}{3}; \frac{-10\sqrt{30}}{3} \right)$.

Nhận xét: Có thể dễ mắc các sai lầm như nhân hai vế phương trình với x hoặc y mà chưa biện luận trường hợp $x = 0, y = 0$, từ $y^2 = \frac{1000}{3}$ chỉ lấy nghiệm $y = \sqrt{\frac{1000}{3}}$,

viết nghiệm kiểu $x = \frac{\pm 20\sqrt{30}}{3}; y = \frac{\pm 10\sqrt{30}}{3}$.

7. Ví dụ 7

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 3x^3 - y^3 = \frac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

HD: Đk $x + y \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Với đk đó, ta có hệ } &\Leftrightarrow \begin{cases} (3x^3 - y^3)(x + y) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow (3x^3 - y^3)(x + y) = (x^2 + y^2)^2 \\ &\Leftrightarrow 3x^4 + 3x^3y - xy^3 - y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \\ &\Leftrightarrow 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + 2y)(2x^2 + xy + y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ x + 2 = 0 & (2) \\ 2x^2 + xy + y^2 = 0 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét (1) và thay vào hệ, ta được $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Xét (2) và thay vào hệ, ta được $(x; y) = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5} \right), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{5} \right)$.

Xét (3) $\Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + x^2 + \frac{3y^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (loại).

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm trên.

8. Ví dụ 8

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x - \frac{4}{x} = 2y - \frac{2}{y} \\ 2x = y^3 + 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

HD: Đk $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\text{Với đk đó } (1) \Leftrightarrow (x - 2y) \left(1 + \frac{2}{xy} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ xy = -2 \end{cases}.$$

Nếu $x = 2y$ thì từ (2), ta được $y^3 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + y - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ y^2 + y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \pm \sqrt{13} \end{cases}.$$

Nếu $xy = -2$ thì $x = -\frac{2}{y}$, thay vào (2) ta được

$$-\frac{4}{y} = y^3 + 3 \Leftrightarrow y^4 + 3y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm là $(x; y) = (2; 1), \left(-1 + \sqrt{13}; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right), \left(-1 - \sqrt{13}; \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \right)$.

9. Ví dụ 9

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{2011}{x} - \frac{2012}{z} = 2013 - zx \\ \frac{2012}{y} - \frac{2013}{x} = 2011 - xy \\ \frac{2013}{z} - \frac{2011}{y} = 2012 - yz \end{cases}$$

HD: Đk $x, y, z \neq 0$. Ta thay $2011 = a, 2012 = b$ và $2013 = c$.

$$\text{Với đk đó, hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ca}{x} - \frac{bc}{z} = c^2 - czx \\ \frac{ab}{y} - \frac{ca}{x} = a^2 - axy \\ \frac{bc}{z} - \frac{ab}{y} = b^2 - byz \end{cases}.$$

Cộng vế với vế của ba phương trình trên, ta được $a^2 + b^2 + c^2 = axy + byz + czx$ (1).

$$\text{Mặt khác hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} az - bx = czx - z^2x^2 \\ bx - cy = axy - x^2y^2 \\ cy - ax = byz - y^2z^2 \end{cases}$$

Cộng vế với vế của ba phương trình này, ta được $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = axy + byz + czx$ (2).

Từ (1) và (2), ta được $(a - xy)^2 + (b - yz)^2 + (c - zx)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = a \\ yz = b \\ zx = c \end{cases}$$

Mà a, b, c dương nên x, y, z cùng dấu, từ đó

$$(x; y; z) = \left(\sqrt{\frac{ca}{b}}, \sqrt{\frac{ab}{c}}, \sqrt{\frac{bc}{a}} \right), \left(-\sqrt{\frac{ca}{b}}, -\sqrt{\frac{ab}{c}}, -\sqrt{\frac{bc}{a}} \right).$$

Trở lại bài toán, hệ có hai nghiệm là

$$(x; y; z) = \left(\sqrt{\frac{2013 \cdot 2011}{2012}}, \sqrt{\frac{2011 \cdot 2012}{2013}}, \sqrt{\frac{2012 \cdot 2013}{2011}} \right), \left(-\sqrt{\frac{2013 \cdot 2011}{2012}}, -\sqrt{\frac{2011 \cdot 2012}{2013}}, -\sqrt{\frac{2012 \cdot 2013}{2011}} \right).$$

10. Ví dụ 10

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + y + z = -1 \\ xyz = 1 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2} = \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

HD: Đặt $a = \frac{z^2}{y}$, $b = \frac{x^2}{z}$ và $c = \frac{y^2}{x}$. Từ (2) có $abc = xyz = 1$,

từ (3) có $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow a + b + c - ab - bc - ca + abc - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Nếu $a = 1$ thì $z^2 = y$ (4), thay vào (1) và (2) ta được hệ $\begin{cases} x + z^2 + z = -1 \\ xz^3 = 1 \end{cases}$ (5).

Từ đó $\frac{1}{z^3} + z^2 + z = -1 \Leftrightarrow z^5 + z^4 + z^3 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow z^4(z+1) + (z^3+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^4(z+1) + (z+1)(z^2 - z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)(z^4 + z^2 - z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \text{ (do } z^4 \geq 0, z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0).$$

Thay vào (4) và (5), ta được $(x; y; z) = (-1; 1; -1)$.

Tương tự nếu $b = 1, c = 1$, ta được $(x; y; z) = (-1; -1; 1), (1; -1; -1)$.

11. Ví dụ 11

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

HD: Đk $xyz \neq 0, x \neq -y, y \neq -z, z \neq -x$.

$$\text{Khi đó hệ tương đương với } \begin{cases} x + y + z = \frac{xy + zx}{2} \\ x + y + z = \frac{yz + xy}{3} \\ x + y + z = \frac{zx + yz}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{xy + zx}{2} = \frac{yz + xy}{3} = \frac{zx + yz}{4} = \frac{xy + yz + zx}{\frac{9}{2}} = \frac{xy}{\frac{1}{2}} = \frac{yz}{\frac{5}{2}} = \frac{zx}{\frac{3}{2}}.$$

Mà $y \neq 0, z \neq 0$ nên suy ra $y = \frac{5}{3}x, z = 5x$.

Thay vào phương trình đầu của hệ đã cho, ta được

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{5}{3}x + 5x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{23}{10}, y = \frac{23}{6}, z = \frac{23}{2} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y; z) = \left(\frac{23}{10}; \frac{23}{6}; \frac{23}{2}\right)$.

12. Ví dụ 12

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 20\left(x + \frac{1}{x}\right) = 11\left(y + \frac{1}{y}\right) = 2007\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

HD: Đk $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ, suy ra x, y, z cùng dấu và vì vậy

$$x + y \neq 0, y + z \neq 0, z + x \neq 0.$$

$$\text{Ta có } 20\left(x + \frac{1}{x}\right) = 20\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) = 20\left(\frac{x^2 + xy + yz + zy}{x}\right)$$

$$= \frac{20(x+y)(z+x)}{x}.$$

Tương tự, ta cũng có $11\left(y + \frac{1}{y}\right) = \frac{11(x+y)(y+z)}{y}$ và $2007\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{2007(y+z)(z+x)}{z}$.

Suy ra

$$\frac{20(x+y)(z+x)}{x} = \frac{11(x+y)(y+z)}{y} = \frac{2007(y+z)(z+x)}{z} \Leftrightarrow \begin{cases} 20(z+x)y = 11(y+z)x \\ 20(x+y)z = 2007(y+z)x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9xy + 20yz - 11zx = 0 \\ 2007xy - 20yz + 1987zx = 0 \end{cases}.$$

Từ hệ này và điều kiện đã cho $xy + yz + zx = 1$, ta được $xy = -\frac{988}{1019}$, nghĩa là x và y trái dấu (mâu thuẫn).

Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Nhận xét: Ta có thể giải bằng Phương pháp lượng giác.

13. Ví dụ 13

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 & (1) \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 & (2) \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 & (3) \end{cases}$

HD: Nếu $xyz = 0$ thì dễ thấy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y;z) = (x;0;0), (0;y;0), (0;0;z)$.

Nếu $xyz \neq 0$ thì đặt $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c$, khi đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)^2 = 3+a+a^2 & (1') \\ (c+a)^2 = 4+b+b^2 & (2') \\ (a+b)^2 = 5+c+c^2 & (3') \end{cases}$

Cộng vế với vế các phương trình (1'), (2') và (3') rồi rút gọn, ta được

$$(a+b+c)^2 - (a+b+c) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = -3 \\ a+b+c = 4 \end{cases}.$$

Nếu $a+b+c = -3$ thì thay vào (1'), (2') và (3'), ta được $x = -\frac{5}{6}, y = -1, z = -\frac{5}{4}$.

Nếu $a+b+c = 4$ thì ta được $x = \frac{9}{13}, y = \frac{3}{4}, z = \frac{9}{11}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là

$$(x;y;z) = (x;0;0), (0;y;0), (0;0;z), \left(-\frac{5}{6}; -1; -\frac{5}{4}\right), \left(\frac{9}{13}; \frac{3}{4}; \frac{9}{11}\right).$$

14. Ví dụ 14

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 252 \\ x^2t^2 + y^2z^2 = 2xyzt \end{cases}$$

HD: Ta có hệ tương đương với

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ (x+t)^2 + (y+z)^2 - 2xt - 2yz = 50 \\ (x+t)((x+t)^2 - 3xt) + (y+z)((y+z)^2 - 3yz) = 252 \\ (xt - yz)^2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Từ (*) có $xt = yz$. Đặt $x + t = a$, $y + z = b$, $xt = yz = c$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ a^2 + b^2 - 4c = 50 \\ a(a^2 - 3c) + b(b^2 - 3c) = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ ab + 2c = 47 \\ (a+b)((a+b)^2 - 3ab) - 36c = 252 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \\ c = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 7 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$$

Hay ta có các hệ $\begin{cases} x + t = 5 \\ y + z = 7 \\ xt = yz = 6 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + t = 7 \\ y + z = 5 \\ xt = yz = 6 \end{cases}$.

Dễ dàng giải hai hệ này ta được hệ phương trình đã cho có 8 nghiệm là

$$(x; y; z) = (2; 1; 6; 3), (2; 6; 1; 3), (3; 1; 6; 2), (3; 6; 1; 2), (1; 2; 3; 6), (1; 3; 2; 6), (6; 2; 3; 1), (6; 3; 1; 2).$$

15. Ví dụ 15 (Tuyển sinh vào trường THPT Chuyên Bắc Giang, năm học 2011 - 2012)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2 + 4y^2) = 8y^4(y^2 + 1) \\ \sqrt{5x+6} + \sqrt{2y^2+7} = 7 \end{cases} \quad (1)$$

HD: Điều kiện $x \geq -\frac{6}{5}$.

Biến đổi (1) $\Leftrightarrow (x - 2y^2) \left[(x + y^2)^2 + y^2(3y^2 + 4) \right] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y^2 = 0 \\ (x + y^2)^2 + y^2(3y^2 + 4) = 0 \end{cases}$$

Xét $x = 2y^2$. Thay vào (2) được $\sqrt{5x+6} + \sqrt{x+7} = 7 \quad (3).$

Giải (3) được $x = 2$ (thỏa mãn điều kiện), suy ra $y = \pm 1$.

Xét $\left[(x + y^2)^2 + y^2(3y^2 + 4) \right] = 0$, ta được $x = y = 0$ không thỏa mãn (2).

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = (2; 1), (2; -1)$.

16. Ví dụ 16

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3(x+y)} & (1) \\ 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 15y^4 & (2) \end{cases}$$

HD: Ta thấy (1) $\Leftrightarrow x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 3(x + y)$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 0 \\ 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 0 \\ \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = 8x \\ 8y = x \end{cases}$$

Xét (2) $\Leftrightarrow (x+1)^4 = 15y^4 + x^4$ (3).

$$\text{Nếu } y = -x, \text{ thay vào (3) ta được } (x+1)^4 = 16x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2x \\ x+1 = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } y = 8x, \text{ thay vào (3) ta được } (x+1)^4 = 61441x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt[4]{61441}x \\ x+1 = -\sqrt[4]{61441}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[4]{61441}-1} \\ x = -\frac{1}{\sqrt[4]{61441}+1} \end{cases}$$

Nếu $y = \frac{1}{8}x$, thay vào (3) ta được

$$(x+1)^4 = \frac{4111}{4096}x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt[4]{\frac{4111}{4096}}x \\ x+1 = -\sqrt[4]{\frac{4111}{4096}}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{4111}{4096}} - 1} \\ x = -\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{4111}{4096}} + 1} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 6 nghiệm là

$$(x; y) = (1; -1), \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{a-1}; \frac{8}{a-1}\right), \left(-\frac{1}{a+1}; -\frac{8}{a+1}\right), \left(\frac{1}{b-1}; \frac{1}{8(b-1)}\right), \left(-\frac{1}{b+1}; -\frac{1}{8(b+1)}\right),$$

trong đó $a = \sqrt[4]{61441}$, $b = \sqrt[4]{\frac{4111}{4096}}$.

17. Ví dụ 17

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}.$$

HD: Dễ thấy $x = 0$ hoặc $y = 0$ đều không thỏa mãn hệ.

Xét $xy \neq 0$.

Khi đó hệ tương đương với $\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{3-x}{3x-y} = \frac{y}{x+3y}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\frac{3}{x}-1}{3-\frac{y}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{y}+3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{2-\frac{3}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = \frac{(2x-3)y}{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)y = 1.$$

Do đó, (1) suy ra $(3-x)(x+3y) = y(3x-y)$

$$\Leftrightarrow (3-x)(2x-3)(x(2x-3)+3y(2x-3)) = y(2x-3)(3x(2x-3)-y(2x-3)) \quad (\text{do } 2x-3 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 24x^3 + 57x^2 - 63x + 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(4x^2-12x+13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \quad (\text{do } 4x^2-12x+13 > 0 \text{ với mọi } x \neq 0).$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} y=-1 \\ y=1 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = (1; -1), (2; 1)$.

18. Ví dụ 18

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 12 \\ 5y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 4 \end{cases}.$$

HD: Dễ thấy $xy \neq 0$.

Khi đó hệ tương đương với
$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{12}{5x} \\ 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{4}{5y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{6}{5x} + \frac{2}{5y} \\ \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{6}{5x} - \frac{2}{5y} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{6}{5x} + \frac{2}{5y} \\ \frac{25}{x^2 + y^2} = \frac{36}{x^2} - \frac{4}{y^2} \end{cases} \quad (2)$$

Xét (2), ta được

$$\begin{aligned} 36y^4 + 7x^2y^2 - 4x^4 &= 0 \Leftrightarrow (4x^2 + 9y^2)(x^2 - 4y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 0 \text{ (do } 4x^2 + 9y^2 > 0 \text{ với mọi } xy \neq 0). \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -2y \end{cases}. \end{aligned}$$

Thay vào (1), từ đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = (2; 1), \left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

I.2.3. Một số bài tập tương tự

1. Bài 1 (Đề tuyển sinh vào trường THPT Chuyên Bắc Giang, năm học 2008 - 2009)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - 2x + 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases}.$$

2. Bài 2

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 37 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 1 \end{cases}.$$

3. Bài 3

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}.$$

4. Bài 4

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

5. Bài 5

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2(y-z) = -\frac{5}{3} \\ y^2(z-x) = 3 \\ z^2(x-y) = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

I.3. Phương pháp đặt ẩn phụ**I.3.1. Một số lưu ý**

Phát hiện ẩn phụ $u = f(x;y)$, $v = g(x;y)$ hay $a = f(x)$, $b = f(y)$, $c = f(z)$ có ngay trong từng phương trình hoặc xuất hiện sau một số phép biến đổi hằng đẳng thức cơ bản hoặc phép chia cho một biểu thức khác không để đưa hệ về dạng đơn giản hơn.

I.3.2. Một số ví dụ**1. Ví dụ 1**

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y & (1) \\ (x^2 + 1)(y+x-2) = y & (2) \end{cases}$$

$$\text{HD: Ta thấy } y = 0 \text{ không thỏa mãn (1), do đó hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + y + x = 4 \\ \left(\frac{x^2+1}{y}\right)(y+x-2) = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x^2+1}{y}; v = y+x-2 \text{ suy ra } u = v = 1.$$

Ta được hệ có nghiệm là $(x;y) = (1;2), (-2;5)$.

2. Ví dụ 2

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 & (1) \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 & (2) \end{cases}$$

HD: Đk $x+y \neq 0$.

$$\text{Khi đó ta được } \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x+y + \frac{1}{x+y} + x-y = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } u = x+y + \frac{1}{x+y}; v = x-y \text{ (với } |u| \geq 2 \text{)}, \text{ ta được hệ } \begin{cases} 3u^2 + v^2 = 13 \\ u+v = 3 \end{cases}.$$

Từ đó hệ có nghiệm là $(x;y) = (1;0)$.

3. Ví dụ 3

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt[3]{y^3-1} + \sqrt{x} = 3 \\ x^2 + y^2 = 82 \end{cases}.$$

HD: Đk $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Đặt } u = \sqrt{x}, v = \sqrt[3]{y^3 - 1} \text{ với } u \geq 0, \text{ suy ra } \begin{cases} x = u^2 \\ y^3 - 1 = v^3 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x^2 = u^4 \\ y^3 = v^3 + 1 \end{cases}, \text{ thay vào hệ ta được} \\ \begin{cases} u + v = 3 \\ u^4 + v^3 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ u^4 + (3 - u)^3 = 81 \end{cases} \\ \Rightarrow (u - 3)(u^3 + 2u^2 + 15u + 18) = 0 \\ \Leftrightarrow u = 3 \text{ (do } u^3 + 2u^2 + 15u + 18 > 0 \text{ với } u \geq 0). \end{aligned}$$

Từ đó, hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (9; 1)$.

4. Ví dụ 4

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{8}{3} \\ x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{118}{9} \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{y\sqrt{y}} + \frac{1}{z\sqrt{z}} = \frac{728}{27} \end{cases}.$$

HD: Đk $x > 0, y > 0, z > 0$.

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{\sqrt{x}} = a, y - \frac{1}{\sqrt{y}} = b, z - \frac{1}{\sqrt{z}} = c.$$

$$\text{Khi đó } x + \frac{1}{x} = a^2 + 2, x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = a^3 + 3a, y + \frac{1}{y} = b^2 + 2, y\sqrt{y} - \frac{1}{y\sqrt{y}} = b^3 + 3b,$$

$$z + \frac{1}{z} = c^2 + 2, z\sqrt{z} - \frac{1}{z\sqrt{z}} = c^3 + 3c.$$

$$\begin{aligned} \text{Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} a + b + c = \frac{8}{3} & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 = \frac{64}{9} & (2) \\ a^3 + b^3 + c^3 = \frac{512}{27} & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ta được } 3(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - \frac{512}{27} = 0 \text{ (do (1) và (3)).}$$

$$\text{Nếu } a + b = 0 \text{ thì từ (1) suy ra } c = \frac{8}{3}, \text{ thay vào (2) ta được } a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

$$\text{Do đó } x - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, y - \frac{1}{\sqrt{y}} = 0, z - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{8}{3}, \text{ suy ra } (x; y; z) = (1; 1; 9).$$

$$\text{Tương tự, nếu } b + c = 0 \text{ thì } (x; y; z) = (9; 1; 1), \text{ nếu } c + a = 0 \text{ thì } (x; y; z) = (1; 9; 1).$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x; y; z) = (9; 1; 1), (1; 9; 1), (1; 1; 9)$.

I.3.3. Một số bài tập tương tự**1. Bài 1**

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}.$$

2. Bài 2

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 - 4xy^2 = 1 \\ 2x^4 + 8y^4 - 2x - y = 0 \end{cases}.$$

3. Bài 3

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y} - \sqrt{x+4y} = -1 \\ \sqrt{2x+y} + x = 3 \end{cases}.$$

4. Bài 4

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}.$$

5. Bài 5

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2xy + y\sqrt{x^2 - y^2}}{14} = \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3} + \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3} = 9 \end{cases}.$$

I.4. Phương pháp lượng giác**I.4.1. Một số lưu ý**

Khi giải phương trình lượng giác ta có thể đặt ẩn phụ cho các hàm số lượng giác để chuyển phương trình lượng giác về phương trình đại số cơ bản mà ta đã biết cách giải. Tuy nhiên trong nhiều bài toán giải Hệ phương trình (Phương trình) ta cũng có thể làm ngược lại rất hiệu quả, bằng những tính chất của hàm số lượng giác ta sẽ chuyển bài toán đại số về bài toán lượng giác và giải quyết bài toán lượng giác này. Thực chất Phương pháp lượng giác cũng có thể gọi là Phương pháp đặt ẩn phụ.

Khi giải Hệ phương trình bằng Phương pháp lượng giác ta có thể đặt

$f(x) = k \sin \alpha$ nếu $f(x) \in [-k; k]$ với điều kiện $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $f(x) = k \cos \alpha$ với điều

kiện $\alpha \in [0; \pi]$. Cũng có khi đặt $f(x) = \tan \alpha; f(x) = \cot \alpha, \dots$ để đưa Hệ phương trình đã cho về Hệ phương trình hoặc phương trình lượng giác với một số điều cần lưu ý như hàm số $\sin x$ và $\cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$, còn

hai hàm số $\tan x$ và $\cot x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ và $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \dots$

Thường ta dựa vào điều kiện của ẩn để quyết định cách đặt ẩn phụ lượng giác.

Giải Hệ phương trình hoặc Phương trình lượng giác rồi từ đó tìm nghiệm của Hệ phương trình đã cho.

Đôi khi trong lời giải ta cũng kết hợp với việc sử dụng Phương pháp đánh giá.

I.4.2. Một số ví dụ**1. Ví dụ 1**

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 20\left(x + \frac{1}{x}\right) = 11\left(y + \frac{1}{y}\right) = 2007\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

HD: Đk $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Đặt $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$.

Khi đó $xy + yz + zx = 1 \Rightarrow A + B + C = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Mặt khác $20\left(x + \frac{1}{x}\right) = 11\left(y + \frac{1}{y}\right) = 2007\left(z + \frac{1}{z}\right)$, suy ra

$$\frac{20}{\sin 2A} = \frac{11}{\sin 2B} = \frac{2007}{\sin 2C} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 \sin 2B = 11 \sin 2A \\ 20 \sin 2C = 2007 \sin 2A \end{cases}$$

Do đó

$$20(\sin 2C - \sin 2B) = 1998 \sin A \cos A \Leftrightarrow 40 \cos(B + C) \sin(B - C) = 1998 \sin A \cos A$$

Mà $A + B + C = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nên $40 \sin(B - C) = 1998 \sin(B + C)$

$$\Leftrightarrow -1958\sin B \cos C = 2038\sin C \cos B, \text{ hay } -1958y = 2038z.$$

Suy ra y và z trái dấu.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

2. Ví dụ 2

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + y + z = xyz \\ x(y^2 - 1)(z^2 - 1) + y(z^2 - 1)(x^2 - 1) + z(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

HD: Nếu $xyz = 0$ thì dễ dàng thấy hệ có các họ nghiệm là $(x; y; z) = (0; y; -y), (z; 0; -z), (x; -x; 0)$.

Nếu $xyz \neq 0$ thì chia cả hai vế của phương trình thứ hai cho $4xyz$, ta được

$$\frac{y^2 - 1}{2y} \cdot \frac{z^2 - 1}{2z} + \frac{z^2 - 1}{2z} \cdot \frac{x^2 - 1}{2x} + \frac{x^2 - 1}{2x} \cdot \frac{y^2 - 1}{2y} = 0 \quad (1)$$

Đặt $x = \tan \alpha, y = \tan \beta, z = \tan \gamma$ thì $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = k\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $\cot 2\alpha \cdot \cot 2\beta + \cot 2\beta \cdot \cot 2\gamma + \cot 2\gamma \cdot \cot 2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \frac{y^2 - 1}{2y} \cdot \frac{z^2 - 1}{2z} + \frac{z^2 - 1}{2z} \cdot \frac{x^2 - 1}{2x} + \frac{x^2 - 1}{2x} \cdot \frac{y^2 - 1}{2y} = 1 \text{ (vô lý).}$$

Vậy hệ đã cho có các họ nghiệm là $(x; y; z) = (0; y; -y), (z; 0; -z), (x; -x; 0)$.

3. Ví dụ 3

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ (1-x)(1+y) = 2 \end{cases}$$

HD: Đk $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Đặt $x = \cos \alpha, y = \cos \beta$ với $\alpha, \beta \in [0; \pi]$, khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} \cos \alpha \cdot \sin \beta + \cos \beta \cdot \sin \alpha = 1 \\ (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \beta) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

Đặt $t = \sin \alpha - \cos \alpha, |t| \leq \sqrt{2}$ suy ra $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1-t^2}{2}$.

$$\text{Khi đó } t - \frac{1-t^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ (do } |t| \leq \sqrt{2} \text{)}.$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta được } \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = 0.$$

Từ đó hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (0; 1)$.

I.4.3. Một số bài tập tương tự**1. Bài 1**

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

2. Bài 2

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

3. Bài 3

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}.$$

4. Bài 4

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(4-y^2) = 8y \\ y(4-z^2) = 8z \\ z(4-x^2) = 8x \end{cases}.$$

5. Bài 5

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - 3z - 3z^2x + z^3 = 0 \\ y - 3x - 3x^2y + x^3 = 0 \\ z - 3y - 3y^2z + y^3 = 0 \end{cases}.$$

6. Bài 6

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}.$$

I.5. Phương pháp đánh giá**I.5.1. Một số lưu ý**

1. Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$.

2. Khi gặp hệ phương trình dạng
$$\begin{cases} f(x) = f(y) & (1) \\ g(x; y) = 0 & (2) \end{cases}$$
, ta có thể tìm lời giải theo

một trong hai cách.

Cách 1

Xét $(1) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0$, rồi tìm cách đưa về phương trình tích có vế phải bằng 0.

Cách 1

Xét hàm số $y = f(t)$, ta thường gặp trường hợp hàm số liên tục trong tập xác định của nó.

Nếu $y = f(t)$ đơn điệu thì từ (1) suy ra $x = y$. Khi đó bài toán đưa về giải (hoặc biện luận) phương trình (2) theo ẩn x .

Nếu hàm số $y = f(t)$ có một cực trị tại $t = a$ thì nó thay đổi chiều biến thiên một lần khi qua a . Từ (1) suy ra $x = y$ hoặc x, y nằm về hai phía đối với a .

3. Nếu hệ phương trình ba ẩn x, y, z không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x, y, z thì không giảm tính tổng quát có thể giả sử $x = \max\{x; y; z\}$, nghĩa là $x \geq y, x \geq z$.

4. Sử dụng đạo hàm hoặc các bất đẳng thức cổ điển Cauchy, Bunhiacopxky... thường đánh giá dẫn đến $x = y$ hoặc $x = y = z$.

I.5.2. Một số ví dụ**1. Ví dụ 1**

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} e^x - e^y = x - y & (1) \\ \log_2 \frac{x}{2} + \log_{\sqrt{2}} 4y^3 = 10 & (2) \end{cases}$$

HD: Đk $x > 0, y > 0$.

Với đk đó $(1) \Leftrightarrow e^x - x = e^y - y$ (3).

Xét hàm số $f(t) = e^t - t$, suy ra $f'(t) = e^t - 1 > 0$ với mọi $t > 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trong khoảng $(0; +\infty)$.

Từ (3) suy ra $\begin{cases} f(x) = f(y) \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$

Thay vào (2), ta được $\log_2 \frac{x}{2} + \log_{\sqrt{2}} 4y^3 = 10 \Leftrightarrow \log_2 x - 1 + 2(2 + 3\log_2 x) = 10$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 1.$$

Từ đó, hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (2; 2)$.

2. Ví dụ 2

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y & (1) \\ 2x^2 - 5xy + y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

HD: Đk $x > -1, y > -1$.

Với điều kiện đó $(1) \Leftrightarrow \ln(1+x) - x = \ln(1+y) - y$ (3).

Xét hàm số $f(t) = \ln(1+t) - t$, với $t \in (-1; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}, \text{ do đó } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trong khoảng $(-1; 0)$ và nghịch biến trong khoảng $(0; +\infty)$.

Ta thấy $(3) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, từ đó suy ra $x = y$ (nếu x, y cùng một khoảng đơn điệu) hoặc $xy < 0$ (nếu x, y khác khoảng đơn điệu).

Nếu $xy < 0$ thì $Vt(2) < 0$ (loại).

Nếu $x = y$ thì thay vào (2), ta được nghiệm của hệ là $(x; y) = (0; 0)$.

3. Ví dụ 3

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 4 + 9 \cdot 3^{x^2-2y} = (4 + 9^{x^2-2y}) \cdot 7^{2y-x^2+2} & (1) \\ 4^x + 4 = 4x + 4\sqrt{2y-2x+4} & (2) \end{cases}$$

HD: Đk $y - x + 2 \geq 0$.

Đặt $t = x^2 - 2y$, khi đó $(1) \Leftrightarrow 4 + 3^{t+2} = (4 + 9^t) \cdot 7^{2-t}$

$$\Leftrightarrow \frac{4 + 3^{t+2}}{7^{t+2}} = \frac{4 + 3^{2t}}{7^{2t}}$$

$$\Leftrightarrow f(t+2) = f(2t),$$

trong đó $f(t) = \frac{4 + 3^t}{7^t} = 4\left(\frac{1}{7}\right)^t + \left(\frac{3}{7}\right)^t$, với $t \in \mathbb{R}$.

Dễ thấy $f(t)$ là hàm số nghịch biến do $0 < \frac{1}{7}; \frac{3}{7} < 1$.

Do đó $f(t+2) = f(2t) \Leftrightarrow t+2 = 2t$

$$\Leftrightarrow t = 2, \text{ hay } x^2 - 2y = 2.$$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 2y = x^2 - 2$, thay vào (2) ta được $4^x + 4 = 4x + 4\sqrt{x^2 - 2 - 2x + 4}$

$$\Leftrightarrow 4^{x-1} = x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow 4^z = z + \sqrt{z^2 + 1}, \text{ trong đó } z = x - 1.$$

$$\Leftrightarrow 4^{-z} = -z + \sqrt{z^2 + 1} \text{ (do } 4^z \cdot 4^{-z} = 1)$$

Suy ra $4^z - 4^{-z} = 2z$.

Xét hàm số $g(z) = 4^z - 4^{-z} - 2z$, $z \in \mathbb{R}$.

Có $g'(z) = \ln 4(4^z + 4^{-z}) - 2 > 0$, với mọi $z \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $g(z)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dễ thấy $z = 0$ là nghiệm duy nhất của $g(z) = 0$, dẫn đến (3) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Từ đó hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y) = \left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

4. Ví dụ 4

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y \\ x^8 + y^4 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

HD: Từ (2), ta được $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Xét $f(t) = t^3 - 5t$, dễ thấy hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x = y$, thay vào (2) ta được $x^8 + x^4 - 1 = 0$.

Tóm lại hệ đã cho có nghiệm là

$$(x; y) = \left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}; \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right), \left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}; -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right).$$

5. Ví dụ 5

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases}.$$

HD: Cộng vế với vế hai phương trình của hệ ta được

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = x^2 + y^2 \quad (1).$$

$$\text{Ta thấy } \sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(x-1)^2 + 8} \geq 2 \Rightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} \leq \frac{2|xy|}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} \leq \frac{2|xy|}{2} = |xy|.$$

$$\text{Tương tự } \sqrt[3]{y^2 - 2y + 9} \leq |xy|.$$

Mặt khác, theo Bất đẳng thức Cauchy $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$, nên $\forall t(1) \leq \forall p(1)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}$, thử lại ta được hệ có hai nghiệm là $(x; y) =$

$(0; 0), (1; 1)$.

6. Ví dụ 6

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}.$$

$$\text{HD: Đặt } u = x - 1, v = y - 1, \text{ ta được } \begin{cases} u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v & (1) \\ v + \sqrt{v^2 + 1} = 3^u & (2) \end{cases}.$$

Trừ vế với vế hai phương trình trên, ta được $u + \sqrt{u^2 + 1} + 3^u = v + \sqrt{v^2 + 1} + 3^v$ (3).

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} + 3^t$, có $f'(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3^t \ln 3$.

Dễ thấy $f'(t) > 0$ với mọi t , do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó (3) $\Leftrightarrow u = v$, thay vào (1) ta được $u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^u$ (4).

Do hai vế của (4) đều dương nên (4) $\Leftrightarrow \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) - u \ln 3 = 0$.

Xét hàm số $g(u) = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) - u \ln 3$, có $g'(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} - \ln 3 < 1 - \ln 3 < 0$,

với mọi $u \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $g(u)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, ta được (4) có nghiệm duy nhất là $u = 0$.

Từ đó hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = (1; 1)$.

7. Ví dụ 7

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^3 - 6y - 2 \end{cases}.$$

$$\text{HD: Hệ đã cho tương đương với } \begin{cases} y - 2 = -(x + 1)^2(x - 2) & (1) \\ x - 2 = 2(y + 1)^2(y - 2) & (2) \end{cases}$$

Nếu $x > 2$ thì từ (1) suy ra $y - 2 < 0$, mâu thuẫn với (2) có $x - 2$ và $y - 2$ cùng dấu.

Tương tự, nếu $x < 2$ cũng vô lý.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (2; 2)$.

8. Ví dụ 8

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + 3y^2 - 6y + 4 = 0 \\ x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 \end{cases}.$$

HD: Xét phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$x^3 = -3(y - 1)^2 - 1 \leq -1 \Rightarrow x \leq -1 \quad (1).$$

Mặt khác, từ phương trình còn lại của hệ, ta thấy $x^2(y^2 + 1) = 2y \Rightarrow x^2 = \frac{2y}{y^2 + 1} < 1$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $x = -1$, thay vào phương trình đầu của hệ suy ra $y = 1$.

Thử lại đúng, vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = (-1; 1)$.

9. Ví dụ 9

Giải hệ phương trình (Tuyển sinh Đại học Khối A năm 2010)

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 & (2) \end{cases}$$

$$\text{HD: Đk } x \leq \frac{3}{4}, y \leq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Xét } (1) \Leftrightarrow (4x^2 + 1)2x = (5 - 2y + 1)\sqrt{5 - 2y}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} 2x = u \\ \sqrt{5 - 2y} = v \end{cases} \Rightarrow (u^2 + 1)u = (v^2 + 1)v.$$

Để thấy hàm số $f(t) = (t^2 + 1)t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra $u = v$ hay

$$2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{5 - 4x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Thế } y \text{ vào } (2), \text{ ta được } 4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7 = 0 \quad (3).$$

Để thấy $x = 0$ và $x = \frac{3}{4}$ không là nghiệm của (3).

$$\text{Xét hàm số } g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7 \text{ trên khoảng } \left(0; \frac{3}{4}\right).$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 8x - 8x\left(\frac{5}{2} - 2x^2\right) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} < 0 \text{ trên khoảng } \left(0; \frac{3}{4}\right).$$

Do đó $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

Mà $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, nên (3) có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$, suy ra $y = 2$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

10. Ví dụ 10

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 & (1) \\ (x-1)^4 = y & (2) \end{cases}$$

$$\text{HD: Đk } x \geq 1, y \geq 0.$$

$$\text{Thế } y \text{ từ } (2) \text{ vào } (1), \text{ ta được } \sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 8 - x^3 \quad (3).$$

$$\text{Từ } (3) \text{ có } \sqrt{x-1} = -x^3 + x^2 - 2x + 9 \quad (4).$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 9, \text{ với } x \geq 1.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = -3x^2 + 2x - 2 < 0, \text{ với mọi } x \geq 1.$$

Do đó hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trong đoạn $[1; +\infty)$.

Mặt khác hàm số $g(x) = \sqrt{x-1}$ luôn đồng biến trong đoạn $[1; +\infty)$.

Từ đó suy ra (4) có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y) = (2;1)$.

Nhận xét: Với bài toán này, dùng đạo hàm để giải quyết là khá hay.

Tuy nhiên, ta cũng có thể không sử dụng đạo hàm mà có thể biến đổi khéo léo như sau:

$$\text{Ta thấy } (3) \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)-((x-1)^2-1)+x^3-8=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} - x(x-2) + (x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + x^2 + x + 4 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (do biểu thức còn lại luôn dương với mọi } x \geq 1).$$

11. Ví dụ 11

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x+y+z=2 & (1) \\ 4x+4y-2xy+z^2=4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{HD: Coi } z \text{ là tham số, ta được } \begin{cases} x+y=2-z \\ xy=\frac{z^2-4z+4}{2} \end{cases}$$

$$\text{Hệ có nghiệm } \Leftrightarrow (z-2)^2 - 4 \frac{(z-2)^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -(z-2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2. \text{ Khi đó } x = y = 0$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y;z) = (0;0;2)$.

12. Ví dụ 12

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} & (2) \end{cases}$$

$$\text{HD: Đk } x \geq -\frac{5}{4}.$$

$$\text{Để thấy } y \neq 0, \text{ chia cả hai vế của (1) cho } y^5 \neq 0, \text{ ta được } \left(\frac{x}{y}\right)^5 + \left(\frac{x}{y}\right) = y^5 + y.$$

$$\text{Hàm số } f(t) = t^5 + t \text{ luôn đồng biến trên khoảng xác định nên } \frac{x}{y} = y \Rightarrow x = y^2.$$

Thế vào (2), ta được $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6$, đánh giá hoặc biến đổi tương đương dẫn đến $x = 1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;-1), (1;1)$.

13. Ví dụ 13

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 - 2x + y^3 = -2 & (1) \\ x^2 y^3 - 2x + y = 0 & (2) \end{cases}$$

HD: Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x , (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -1 - y^3 \geq 0$
 $\Leftrightarrow y \leq -1$ (*1).

Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn x , (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - y^4 \geq 0$
 $\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$ (*2).

Từ (*1) và (*2) suy ra $y = -1$, thay vào (1) ta được $x = 1$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; -1)$.

14. Ví dụ 14

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} - y^2 = 2\sqrt{2} \\ \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt{6-x} + 2\sqrt{2}y = 8 + \sqrt{2} \end{cases}$$

HD: Đk $0 \leq x \leq 6$.

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ rồi biến đổi, ta được

$$(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}) + (\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x}) = (y - \sqrt{2})^2 + 6 + 3\sqrt{2} \geq 6 + 3\sqrt{2} \quad (1).$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxky, ta được $(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x})^2 \leq (1+2)(2x + (12-2x)) = 36$
 $\Rightarrow \sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x} \leq 6$ (2).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Tương tự ta có $(\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x})^2 \leq (1+2)(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}) \leq 18$
 $\Rightarrow \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} \leq 3\sqrt{2}$ (3).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Từ (2) và (3), ta được $(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}) + (\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x}) \leq 6 + 3\sqrt{2}$ (4).

Từ (1) và (4) dẫn đến các đẳng thức ở (1), (2) và (3) xảy ra đồng thời.

Khi đó $x = 2$ và $y = \sqrt{2}$, thử lại ta được hệ có nghiệm là $(x; y) = (2; \sqrt{2})$.

Nhận xét: Có thể xét hàm số $f(x) = (\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}) + (\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x})$, với $0 \leq x \leq 6$.

Tính đạo hàm và xét sự biến thiên của $f(x)$ trong đoạn $[0; 6]$.

15. Ví dụ 15

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z \\ \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = x \end{cases}$$

HD: Ta thấy $y = \frac{2x^2}{x^2+1} \geq 0$, với mọi x .

Nếu $y = 0$ thì $x = z = 0$, do đó $(x; y; z) = (0; 0; 0)$ là nghiệm của hệ.

Nếu $y > 0$ thì $z > 0$, $x > 0$. Dễ thấy $x^2 + 1 \geq 2x > 0$ nên $\frac{2x^2}{x^2 + 1} \leq x$ hay $y \leq x$.

Theo BĐT Cauchy, ta có $y^4 + y^2 + 1 \geq 3\sqrt[3]{y^4 \cdot y^2 \cdot 1} = 3y^2 > 0$ nên $z = \frac{3y^3}{y^4 + y^2 + 1} \leq y$.

Từ phương trình thứ ba của hệ suy ra $x \leq z$, do đó $x \leq y \leq z \leq x$, suy ra $x = y = z$.

Thay vào phương trình đầu của hệ, ta được $x = y = z = 1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x; y; z) = (0; 0; 0)$, $(1; 1; 1)$.

16. Ví dụ 16

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + y + z = 9 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} = 6 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

HD: Đk $x, y, z \geq -1$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxky, ta được

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1})^2 &= (1 \cdot \sqrt{x+1} + 1 \cdot \sqrt{y+1} + 1 \cdot \sqrt{z+1})^2 \\ &\leq (1+1+1)(x+1+y+1+z+1) = 36. \end{aligned}$$

Suy ra $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} \leq 6$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 3$ (thỏa mãn (2)).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y; z) = (3; 3; 3)$.

17. Ví dụ 17

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 \end{cases}$$

HD: Dễ thấy x, y, z khác 0.

Nếu $x > 1$ thì $x^5 - x^4 = x^4(x-1) > 0 \Rightarrow 2x^2y < 2 \Rightarrow y < \frac{1}{x^2} < 1$,

và $y^5 - y^4 = y^4(y-1) < 0 \Rightarrow 2y^2z > 2 \Rightarrow z > \frac{1}{y^2} > 1 \Rightarrow z^5 - z^4 = z^4(z-1) > 0$

$\Rightarrow 2z^2x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{z^2} < 1$, mâu thuẫn.

Nếu $x < 1$ thì tất cả các bất đẳng thức ở trên cùng đổi chiều nên cũng mâu thuẫn.

Nếu $x = 1$ thì dễ thấy $y = 1$ và $z = 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

18. Ví dụ 18

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 12x^2 - 48x + 64 = y^3 \\ 12y^2 - 48y + 64 = z^3 \\ 12z^2 - 48z + 64 = x^3 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

(3)

HD: Giả sử $(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ thì dễ thấy

$(x; y; z) = (y_0; z_0; x_0); (z_0; x_0; y_0)$ cũng là nghiệm của hệ, do đó có thể giả sử

$$x = \max \{x; y; z\}.$$

Ta thấy $12x^2 - 48x + 64 = 12(x-2)^2 + 16 \geq 16$ suy ra $y > 2$. Tương tự $z > 2$ và $x > 2$.

Trừ vế với vế của (1) và (3) ta được

$$x^3 - y^3 = 12(z^2 - x^2) - 48(z - x) = 12(z - x)(z + x - 4) \quad (4)$$

Theo trên, có $x^3 - y^3 \geq 0$, $z - x \leq 0$, $z + x - 4 > 0$, nên từ (4) suy ra $x = y = z$.

Thay vào (1), ta được $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y; z) = (4; 4; 4)$.

19. Ví dụ 19

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^{19} + y^5 = 1890z + z^{2013} & (1) \\ y^{19} + z^5 = 1890x + x^{2013} & (2) \\ z^{19} + x^5 = 1890y + y^{2013} & (3) \end{cases}$$

HD: Dễ thấy $(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ thì $(x; y; z) = (-x_0; -y_0; -z_0)$

cũng là nghiệm của hệ.

Không giảm tính tổng quát, giả sử có ít nhất hai trong ba số x, y, z không âm, chẳng hạn $x \geq 0, y \geq 0$

Từ (1) suy ra $z \geq 0$.

Mặt khác, nếu $0 < t \leq 1$ thì $1890 + t^{2012} > 2 \geq t^{18} + t^4$.

Nếu $t > 1$ thì $1890 + t^{2012} > 1 + t^{2012} > 2\sqrt{t^{2012}} = 2t^{1006} > t^{18} + t^4$.

Do đó $1890t + t^{2013} > t^{19} + t^5$ với mọi $t > 0$.

Cộng vế với vế các phương trình trên, ta được $x = y = z = 0$.

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

20. Ví dụ 20

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ (1+x)(1+y)(1+z) = \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3 \end{cases}$$

HD: Đk $x, y, z \geq 0$.

Theo BĐT Cauchy, ta có $(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx) + xyz$

$$\begin{aligned} &\geq 1 + 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2} + \sqrt[3]{(xyz)^3} \\ &= \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, do đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

21. Ví dụ 21

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} = 1 \\ 8^9 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot z^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{HD: Từ (1) có } \frac{2x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} = \frac{1}{x+1}, \text{ áp dụng BĐT Cauchy cho 8 số dương,}$$

ta được

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} + \frac{z}{z+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^2 y^4 z^2}{(x+1)^2 (y+1)^4 (z+1)^2}}$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{y+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^3 y^3 z^2}{(x+1)^3 (y+1)^3 (z+1)^2}}, \quad \frac{1}{z+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^3 y^4 z}{(x+1)^3 (y+1)^4 (z+1)}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ ba BĐT trên có } \left(\frac{1}{x+1}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{y+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{z+1}\right)^2 &\geq 8^9 \sqrt[8]{\frac{x^{24} y^{32} z^{16}}{(x+1)^{24} (y+1)^{32} (z+1)^{16}}} \\ &= 8^9 \frac{x^3 y^4 z^2}{(x+1)^3 (y+1)^4 (z+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } x^3 y^4 z^2 \leq \frac{1}{8^9} \quad (3).$$

Kết hợp với (2) thì (3) có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} = \frac{z}{z+1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{8}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

$$\text{Vậy hệ có nghiệm là } (x; y; z) = \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right).$$

22. Ví dụ 22

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 20 \cdot \frac{y}{x^2} + 11y = 2013 \\ 20 \cdot \frac{z}{y^2} + 11z = 2013 \\ 20 \cdot \frac{x}{z^2} + 11x = 2013 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{HD: Từ (1), ta có } y \left(\frac{20}{x^2} + 11 \right) = 2013 \Rightarrow y > 0.$$

Tương tự, từ (2) và (3) $\Rightarrow z > 0, x > 0$.

Do hệ hoán vị vòng quanh nên ta giả sử $x = \max\{x; y; z\}$, nghĩa là $x \geq y, x \geq z$.

Trừ vế với vế của (3) cho (1), ta được

$$20\left(\frac{x}{z^2} - \frac{y}{x^2}\right) + 11(x - y) = 0 \Leftrightarrow 20(x^3 - yz^2) + 11x^2z^2(x - y) = 0 \quad (4).$$

Vì $x \geq y > 0, x \geq z > 0$ nên dễ thấy $x - y \geq 0$ và $x^3 - yz^2 \geq 0$.

$$\text{Do đó } (4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = yz^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

$$\text{Thay vào (1), ta được } \frac{20}{x} + 11x = 2013 \Leftrightarrow 11x^2 - 2013x + 20 = 0.$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ.

23. Ví dụ 23

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 4y \\ y^3 - 3y^2 + 5y + 1 = 4z \\ z^3 - 3z^2 + 5z + 1 = 4x \end{cases}$$

HD: Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$, có $f'(t) = 3t^2 - 6t + 5 > 0$, với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} f(x) = 4y \\ f(y) = 4z \\ f(z) = 4x \end{cases} \text{ . Không giảm tính tổng quát, giả sử } x = \max\{y; z\}$$

(hay $x \geq y, x \geq z$).

Nếu $x > y$ thì $f(x) > f(y) \Rightarrow y > z \Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow z > x$ (mâu thuẫn).

Tương tự, nếu $x > z$ thì cũng mâu thuẫn, suy ra $x = y = z$.

Từ đó ta được hệ có hai nghiệm là

$$(x; y; z) = (1; 1; 1), (1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}), (1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}).$$

$$\text{Nhận xét: Ta có hệ } \begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases} \text{ , nếu các hàm số } f(t) \text{ và } g(t) \text{ cùng tính đơn điệu thì lý}$$

luận như trên, ta suy ra $x = y = z$.

24. Ví dụ 24

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} + 1 \end{cases} \text{ , với } x, y, z \text{ là các số thực}$$

duy.

$$\text{HD: Ta chứng minh } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} + 1 \quad (1).$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{x(y+z)(x+y)}{y} + \frac{y(y+z)(x+y)}{z} + \frac{z(y+z)(x+y)}{x} \geq (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+y)(y+z) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2z}{y} + x^2 + xy + zx + \frac{y^2(x+y)}{z} + y^2 + xy + z^2 + yz + \frac{yz(y+z)}{x} \geq x^2 + zx + z^2 + 3y^2 + 3xy + 3yz \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2z}{y} + \frac{y^2(x+y)}{z} + \frac{yz(y+z)}{x} \geq xy + 2yz + 2y^2 \quad (2). \end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy thì $\forall t(2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2z}{y} + \frac{y^3}{z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2z}{y} + \frac{z^2y}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{z} + \frac{z^2y}{x} \right) + y^2 \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq xy + \left(\sqrt{xz^3} + \sqrt{\frac{y^4z}{x}} \right) + 2y^2 \\ &\geq xy + 2yz + 2y^2. \end{aligned}$$

Do đó (2) đúng hay (1) đúng.

Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Thay vào hệ ta được hệ có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$.

25. Ví dụ 25

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2(x+1) = 2(y^3 - x) + 1 \\ y^2(y+1) = 2(z^3 - y) + 1 \\ z^2(z+1) = 2(x^3 - z) + 1 \end{cases}$$

$$\text{HD: Ta có hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 + 2x = 2y^3 + 1 \\ y^3 + y^2 + 2y = 2z^3 + 1 \\ z^3 + z^2 + 2z = 2x^3 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Trong đó $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ và $g(t) = 2t^3 + 1$.

Ta thấy $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0$ và $g'(t) = 6t^2 \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, do đó $f(t)$ và $g(t)$ là hai hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Gọi $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ, không giảm tính tổng quát giải sử $x = \max\{x; y; z\}$.

Nếu $x \geq y \geq z$ hay $x \geq z \geq y$ thì ta dễ dàng chứng minh được $x = y = z$.

$$\text{Do đó hệ đã cho } \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ h(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

Mặt khác, hàm số $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $h(-2) < 0$, $h(0) > 0$, $h(1) < 0$ và $h(2) > 0$ nên $h(x) = 0$ có cả ba nghiệm trong khoảng $(-2; 2)$.

Đặt $x = 2\cos u$ với $u \in (0; \pi)$, khi đó $\sin u \neq 0$ và ta được

$$\begin{cases} x = y = z = 2\cos u \\ 8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Xét } (*) \Leftrightarrow \sin u(8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4u = \sin 3u.$$

Từ đó ta được
$$\begin{cases} x = y = z = 2\cos u \\ u \in \left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7} \right\} \end{cases}.$$

26. Ví dụ 26

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 36x^2y - 60x^2 + 25y = 0 \\ 36y^2z - 60y^2 + 25z = 0 \\ 36z^2x - 60z^2 + 25x = 0 \end{cases}.$$

HD: Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} y = \frac{60x^2}{36x^2 + 25} \\ z = \frac{60y^2}{36y^2 + 25} \\ x = \frac{60z^2}{36z^2 + 25} \end{cases}.$$

Dễ thấy hệ có nghiệm $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Nếu $x, y, z \neq 0$, từ hệ trên ta thấy $x, y, z > 0$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta được
$$y = \frac{60x^2}{36x^2 + 25} \leq \frac{60x^2}{2\sqrt{36x^2 \cdot 25}} = \frac{60x^2}{60x} = x.$$

Tương tự, ta được $y \leq x \leq z \leq y$, suy ra $x = y = z$ và ta tìm được $x = y = z = \frac{5}{6}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x; y; z) = (0; 0; 0), \left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

27. Ví dụ 27

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 3z^3 + 2z^2 \\ y = 3x^3 + 2x^2 \\ z = 3y^3 + 2y^2 \end{cases}.$$

HD: Do hệ hoán vị vòng quanh, giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x + z = 3z^3 + 2z^2 + z \\ y + x = 3x^3 + 2x^2 + x \\ z + y = 3y^3 + 2y^2 + y \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t^2 + t$, khi đó hệ trở thành
$$\begin{cases} x + z = f(z) \\ y + x = f(x) \\ z + y = f(y) \end{cases}$$

Mặt khác $f'(t) = 9t^2 + 4t + 1 > 0$, với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, dẫn đến $x = y = z$.

Thay vào một trong các phương trình của hệ, ta được

$$3x^3 + 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(3x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm là $(x; y; z) = (0; 0; 0), (-1; -1; -1), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

28. Ví dụ 28

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_{2012}} = 2012 \\ \sqrt{x_1 + 8} + \sqrt{x_2 + 8} + \dots + \sqrt{x_{2012} + 8} = 6036 \end{cases}$$

HD: Đk $x_i \geq 0, i = \overline{1, 2012}$.

Ta thấy với mọi $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ thì $9(x+8) - (\sqrt{x} + 8)^2 = 8(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 9(x+8) \geq (\sqrt{x} + 8)^2$
 $\Leftrightarrow 3\sqrt{x+8} \geq \sqrt{x} + 8$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Từ đó ta có $3 \sum_{i=1}^{2012} \sqrt{x_i + 8} \geq \sum_{i=1}^{2012} (\sqrt{x_i} + 8)$, đẳng thức xảy ra khi $x_i = 1, i = \overline{1, 2012}$.

Vậy hệ có nghiệm là $(x_1; x_2; \dots; x_{2012}) = (1; 1; \dots; 1)$.

Nhận xét:

- Có thể thay $2012 = n, 6036 = 3n$.

- Cách khác, hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i + 8} + \sqrt{x_i}) = 4n \\ \sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i + 8} - \sqrt{x_i}) = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i + 8} + \sqrt{x_i}) = 4n \\ \sum_{i=1}^n \frac{8}{\sqrt{x_i + 8} + \sqrt{x_i}} = 2n \end{cases}$

Mặt khác, theo BĐT Bunhiacopxki

$$8n^2 = \left(\sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i + 8} + \sqrt{x_i}) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{8}{\sqrt{x_i + 8} + \sqrt{x_i}} \right) \geq (2\sqrt{2n})^2 = 8n^2.$$

Do đó $\sqrt{x_1 + 8} + \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2 + 8} + \sqrt{x_2} = \dots = \sqrt{x_n + 8} + \sqrt{x_n}$, mà dễ thấy

$\sqrt{y+8} + \sqrt{y} > \sqrt{x+8} + \sqrt{x}$ nếu $y > x \geq 0$.

Bởi vậy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

I.5.3. Một số bài tập tương tự

1. Bài 1

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^{19} + y^5 = 1890z + z^{2012} \\ y^{19} + z^5 = 1890x + x^{2012} \\ z^{19} + x^5 = 1890y + y^{2012} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 24\frac{y}{x^2} + 7y = 2009 \\ 24\frac{z}{y^2} + 7z = 2009 \\ 24\frac{x}{z^2} + 7x = 2009 \end{cases}$$

a. $\begin{cases} 2^x - 2 = 3y - 3^x \\ 3^y - 2 = 3x - 2^y \end{cases}$ b. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4xy = 6 \\ 2x^2 + 8 = 3y + 7x \end{cases}$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\log_7(2x+3y) = \log_3(2x+3y+2) \\ \ln(4x^2+x+1) + x^3 + 21 = 9y \end{cases}$

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x+1=y^3+y^2+2y \\ 3y+1=z^3+z^2+2z \\ 3z+1=x^3+x^2+2x \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1+x}{1-y} = e^{\cos x - \cos y} \\ y = \sqrt{2x - x^2} - 1 \end{cases}$.

$$\text{a. } \begin{cases} x = \sqrt{1 + \frac{y+1}{x}} \\ y = \sqrt{1 + \frac{z+1}{y}} \\ z = \sqrt{1 + \frac{x+1}{z}} \end{cases}$$

I.6. Một số phương pháp khác**I.6.1. Một số lưu ý**

Ngoài những Phương pháp thường gặp ở trên, đôi khi ta cũng có những lời giải khác lạ đối với một số Hệ phương trình. Cũng có thể ta sử dụng kết hợp các Phương pháp ở trên để giải một Hệ phương trình.

I.6.2. Một số ví dụ**1. Ví dụ 1**

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}.$$

HD: Từ hệ suy ra $x + yi + \frac{(3x-y) - (x+3y)i}{x^2+y^2} = 3$, với i là đơn vị ảo.

$$\Rightarrow x + yi + \frac{3(x-yi) - i(x-yi)}{x^2+y^2} = 3.$$

Đặt $z = x + yi$, ta được phương trình ẩn $z \in \mathbb{C}$ là $z + \frac{(3-i)\bar{z}}{|z|^2} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{3-i}{z} = 3$

$$\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 - i = 0.$$

Giải phương trình trên, ta được $z = 2 + i$ và $z = 1 - i$.

Từ đó, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x;y) = (1;-1), (2;1)$.

Nhận xét: Ví dụ này là Ví dụ 17 Mục I.2. Phương pháp biến đổi tương đương.

2. Ví dụ 2

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 5x \left(1 + \frac{1}{x^2+y^2} \right) = 12 \\ 5y \left(1 - \frac{1}{x^2+y^2} \right) = 4 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

HD: Từ (2) suy ra $5yi - \frac{5yi}{x^2+y^2} = 4i$ (3), với i là đơn vị ảo.

Từ (1) và (3) suy ra $5(x+yi) - \frac{5(x-yi)}{x^2+y^2} = 12 + 4i$.

Đặt $z = x + yi \Rightarrow \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}$, ta được $5z + \frac{5}{z} = 12 + 4i \Leftrightarrow 5z^2 - (12+4i)z + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ z = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{cases}.$$

Từ đó ta được hệ có hai nghiệm là $(x; y) = (2; 1), \left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Nhận xét: Ví dụ này là Ví dụ 18 Mục I.2. Phương pháp biến đổi tương đương.

3. Ví dụ 3

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{y-2} + y^2 \\ \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{x-2} + x^2 \end{cases}$$

HD: Đk $x \geq 2, y \geq 2$.

Dễ thấy $(x; y) = (x; 2)$ hoặc $(x; y) = (2; y)$ đều không là nghiệm của hệ đã cho.

Nếu $x > 2, y > 2$ thì trừ vế với vế của hai phương trình đã cho, ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 91} - \sqrt{y^2 + 91} &= \sqrt{y-2} - \sqrt{x-2} + y^2 - x^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 91} + \sqrt{y^2 + 91}} &= \frac{y - x}{\sqrt{y-2} + \sqrt{x-2}} + (y - x)(x + y) \\ \Leftrightarrow (x - y) \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 91} + \sqrt{y^2 + 91}} + \frac{1}{\sqrt{y-2} + \sqrt{x-2}} + x + y \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = y \text{ (do } \Leftrightarrow \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 91} + \sqrt{y^2 + 91}} + \frac{1}{\sqrt{y-2} + \sqrt{x-2}} + x + y > 0, \text{ với mọi } x > 2, y > 2). \end{aligned}$$

Thay $x = y$ vào một trong hai phương trình của hệ, ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 91} &= \sqrt{x-2} + x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 91} - 10 = \sqrt{x-2} - 1 + x^2 - 9 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 91} + 10} &= \frac{x - 3}{\sqrt{x-2} + 1} + (x - 3)(x + 3) \\ \Leftrightarrow (x - 3) \left(\frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 91} + 10} - \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1} - x - 3 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3) \left((x + 3) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 91} + 10} - 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \text{ (do } (x + 3) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 91} + 10} - 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1} < 0, \text{ với mọi } x > 2). \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (3; 3)$.

Nhận xét: Do vai trò x, y như nhau nên có thể giả sử $x \geq y \geq 2$.

Xét $x > y$ dẫn đến $\sqrt{x^2 + 91} > \sqrt{y^2 + 91} \Rightarrow \sqrt{y-2} + y^2 > \sqrt{x-2} + x^2$, suy ra $y > x$.

Do đó ta được $x = y$.

Chương II**MỘT SỐ BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI****II.1. Một số bài toán thi chọn đội tuyển học sinh giỏi quốc gia lớp 12 THPT của tỉnh Bắc Giang và một số tỉnh, thành phố**

Trong những kì thi chọn đội tuyển hoặc kiểm tra đội tuyển Toán của tỉnh Bắc Giang hay của một số tỉnh và thành phố để chuẩn bị cho đội tuyển dự thi chọn học sinh giỏi quốc gia lớp 12 THPT (VMO) cũng có những bài toán giải Hệ phương trình. Sau đây là một số bài toán.

1. Bài 1 (Chọn đội tuyển HSG quốc gia tỉnh Bắc Giang, năm học 2010 – 2011)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-2) = 6 \ln \left(\frac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}} \right) \\ x^5y - 3xy - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{HD: Biến đổi } (x-y)(x^2+xy+y^2-2) &= 6 \ln \left(\frac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}} \right) \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x + 6 \ln(x + \sqrt{x^2+9}) &= y^3 - 2y + 6 \ln(y + \sqrt{y^2+9}) \quad (1) \end{aligned}$$

Xét $f(t) = t^3 - 2t + 6 \ln(t + \sqrt{t^2+9})$, với $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{suy ra } f'(t) = 3t^2 - 2 + \frac{6}{\sqrt{t^2+9}} = 3 \left(t^2 + \frac{2}{\sqrt{t^2+9}} - \frac{2}{3} \right).$$

Chứng minh $f'(t) \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình còn lại của hệ ta được $x^6 - 3x^2 - 1 = 0$ (2)

Đặt $x^2 = u$ ($u \geq 0$) suy ra $u^3 - 3u = 1$ (3)

Xét $g(u) = u^3 - 3u - 1$ với $u \geq 0$, $g'(u) = 3u^2 - 3$ có $g'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1$.

Lập bảng biến thiên, căn cứ vào bảng biến thiên, dễ thấy phương trình (3) có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(0; 2)$.

Đặt $u = 2 \cos \alpha$ với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$(3) \text{ trở thành } \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = \pm \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}}; \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}} \right); \left(-\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}}; -\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}} \right)$.

2. Bài 2 (Kiểm tra đội tuyển HSG quốc gia tỉnh Bắc Giang, năm học 2010 – 2011)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-x^2} + \sqrt{y-y^2} + \sqrt{z-z^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}} \\ (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

HD: Đk $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Giả sử $x = \text{Max}(x; y; z) \Rightarrow x \geq y; x \geq z$.

Nếu $x \geq y \geq z$ thì phương trình sau không thỏa mãn.

Nếu $x \geq z \geq y$ thì $T = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Thật vậy

$$\begin{aligned} 4T &= 4(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \leq 4(z-y)(x-z)(x+y+z) \\ &= 2(z-y)[(\sqrt{3}+1)(x-z)][(\sqrt{3}-1)(x+y+z)] \\ &\leq \frac{1}{27} [2(z-y) + (\sqrt{3}+1)(x-z) + (\sqrt{3}-1)(x+y+z)]^3 \\ &= \frac{1}{27} [2\sqrt{3}x - (3-\sqrt{3})y]^3 \leq \frac{1}{27} [2\sqrt{3}x]^3 \\ &\leq \frac{1}{27} (2\sqrt{3})^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}, \text{ hay } T \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x; y; z) = (0; 0; \frac{1}{\sqrt{3}})$, thay vào ph trình đầu thấy thỏa mãn.

Tương tự với $y = \text{Max}(x; y; z)$, $z = \text{Max}(x; y; z)$ ta được hệ có 3 nghiệm là

$$(x; y; z) = (1; 0; \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}; 1; 0), (0; \frac{1}{\sqrt{3}}; 1).$$

3. Bài 3 (Chọn đội tuyển HSG quốc gia Tp Đà Nẵng, năm học 2010 – 2011)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 = 3x - 12y + 50 \\ y^3 = 12y + 3z - 2 \\ z^3 = 27x + 27z \end{cases}$$

4. Bài 4 (Chọn đội Dự tuyển HSG quốc gia trường THPT Chuyên ĐHS

Hà Nội, năm học 2010 – 2011)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

5. Bài 5 (Kiểm tra đội Dự tuyển HSG quốc gia trường THPT Chuyên ĐHS

Hà Nội, năm học 2010 – 2011)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases}$$

6. Bài 6 (Chọn đội tuyển HSG quốc gia trường THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội, năm học 2010 – 2011)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = -(y+3)(x+z-2) \\ x^2 + 5x + 9z - 7y - 15 = -3yz \\ 8x^2 + 18y^2 + 18xy + 18yz = -84x - 72y - 24z - 176 \end{cases}.$$

7. Bài 7 (Chọn đội tuyển HSG quốc gia tỉnh Đồng Tháp, năm học 2010 – 2011)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_2(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 \end{cases}.$$

8. Bài 8 (Chọn đội tuyển HSG quốc gia tỉnh Đồng Nai, năm học 2010 – 2011)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}.$$

9. Bài 9 (Chọn đội tuyển HSG quốc gia tỉnh Bình Định, năm học 2010 – 2011)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ y(\sqrt{x^2+1}-1) = \sqrt{3x^2+3} \end{cases}.$$

10. Bài 10 (Chọn đội tuyển HSG quốc gia tỉnh Hưng Yên, năm học 2010 – 2011)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \\ x(y^3 - x^3) = 7 \end{cases}.$$

11. Bài 11 (Kiểm tra đội Dự tuyển HSG quốc gia tỉnh Bắc Giang, năm học 2011 – 2012)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ y(\sqrt{x^2+1}-1) = \sqrt{3x^2+3} \end{cases}.$$

II.2. Một số bài toán thi chọn học sinh giỏi Quốc gia (VMO)

Thực tế, bài toán giải Hệ phương trình trong kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia lớp 12 THPT (VMO) được cho là bài toán không khó. Tuy nhiên để làm được việc lớn thì trước hết phải làm tốt việc nhỏ, do đó học sinh muốn đoạt giải từ khuyến khích trở lên thì phải làm tốt bài toán này với mục đích **“Bài được cho là dễ thì đạt điểm tối đa, bài được cho là khó thì ít nhất là không bị mất điểm”**. Dù biết vậy nhưng không phải học sinh xuất sắc nào cũng vượt qua được.

1. Bài 1 (1994 – VMO, Bảng A)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$$

HD: Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t - 3 + \ln(t^2 - t + 1)$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Viết lại hệ, ta được } \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(f(f(x))) = x \end{cases} \quad (*)$$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + \frac{3t^2 - t + 2}{t^2 - t + 1} > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó dễ dàng chứng minh được $(1) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = 0$.

Xét hàm $g(x) = x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 + \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x + 1} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $g(1) = 0$, nên suy ra $(1) \Leftrightarrow x = 1$. Từ đó ta được $x = y = z = 1$.

2. Bài 2 (1994 – VMO, Bảng B)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + 3x + \ln(2x + 1) = y \\ y^2 + 3y + \ln(2y + 1) = x \end{cases}$$

HD: Đk $x > -\frac{1}{2}, y > -\frac{1}{2}$.

Với đk đó, từ hệ ta có $x^2 + 4x + \ln(2x + 1) = y^2 + 4y + \ln(2y + 1)$ (1)

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 4x + \ln(2x + 1)$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(x) = 2x + 4 + \frac{2}{2x + 1} > 0$ với mọi $x > -\frac{1}{2}$ nên $f(x)$ là hàm tăng thật sự trên

khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x = y$, thay vào hệ phương trình đã cho, ta được $x^2 + 2x + \ln(2x+1) = 0$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x + \ln(2x+1)$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Suy ra $g'(x) = 2x + 2 + \frac{2}{2x+1} > 0$ với mọi $x > -\frac{1}{2}$ nên $g(x)$ là hàm tăng thật sự trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Từ đó ta thấy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $g(x) = 0$.

Thử lại ta được $(x; y) = (0; 0)$ là nghiệm duy nhất của hệ đã cho.

3. Bài 3 (1996 – VMO, Bảng A)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}.$$

HD: Dễ thấy, nếu $(x; y)$ là nghiệm của hệ thì $x > 0$ và $y > 0$.

$$\text{Do đó, hệ đã cho } \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y} = \frac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1 - \frac{1}{x+y} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ 1 = \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}.$$

Nhân theo từng vế của (1) và (2), ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} &= \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} \Leftrightarrow 21xy = (x+y)(7y-24x) \\ &\Leftrightarrow 7y^2 - 38xy - 24x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (y-6x)(7y+4x) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 6x \text{ (do } 7y+4x > 0 \text{ với mọi } x > 0, y > 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{thay vào (2) ta được } \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2}{\sqrt{21x}} &= 1 \Leftrightarrow x = \frac{11+4\sqrt{7}}{21} \\ &\Rightarrow y = 6x = \frac{22+8\sqrt{7}}{7}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{11+4\sqrt{7}}{21}; \frac{22+8\sqrt{7}}{7}\right)$.

4. Bài 4 (1999 – VMO, Bảng A)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} (1+4^{2x-y}).5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}.$$

HD: Đk $y^2 + 2x > 0$.

Đặt $2x - y = t$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành $(1 + 4^t).5^{1-t} = 1 + 2^{t+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1+4^t}{5^t} = \frac{1+2^{t+1}}{5} \quad (1)$$

Ta thấy, $V_t(1)$ là hàm số nghịch biến, $V_p(1)$ là hàm số đồng biến nên $t = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Do đó $2x - y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$, thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0 \quad (2)$$

$V_t(2)$ là hàm số đồng biến nên $y = -1$ là nghiệm duy nhất của (2).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (0; -1)$.

5. Bài 5 (2001 – VMO, Bảng B)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}.$$

HD: Đk $\min\{2x; 7x\} \geq -y$.

$$\text{Đặt } \sqrt{7x+y} = t \text{ và } \sqrt{2x+y} = z. \text{ Khi đó hệ đã cho trở thành } \begin{cases} t + z = 5 \\ z + x - y = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Nhận thấy $t^2 - z^2 = 5x$, kết hợp với (1) suy ra $z = \frac{5-x}{2}$.

Thế vào (2), ta được $\frac{5-x}{2} + x - y = 2 \Leftrightarrow x = 2y - 1 \quad (3)$.

Thế (3) vào (2), ta được $\sqrt{5y-2} + y - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{5y-2} = 3 - y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3 \\ y^2 - 11y + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{11 - \sqrt{77}}{2}.$$

Thế vào (3), ta được $x = 10 - \sqrt{77}$.

Thử lại ta thấy $\sqrt{7x+y} = \frac{15 - \sqrt{77}}{2}$; $\sqrt{2x+y} = \frac{\sqrt{77} - 5}{2}$; $x - y = \frac{9 - \sqrt{77}}{2}$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (10 - \sqrt{77}; \frac{11 - \sqrt{77}}{2})$.

6. Bài 6 (2004 – VMO, Bảng A)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16 \end{cases}.$$

HD: Biến đổi hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ y(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 30 \\ z(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ (y - z)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \\ (z - x)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \end{cases}$$

Dễ thấy $(x; y; z) = (0; 0; 0)$ không là nghiệm của hệ nên ta được

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ (y - z)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \\ y = 2z - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2x^2z + xz^2 = 2 \\ -2x^3 + 6x^2z - 9xz^2 + 5z^3 = 14 \\ y = 2z - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2x^2z + xz^2 = 2 \\ -16x^3 + 20x^2z - 16xz^2 + 5z^3 = 0 \\ y = 2z - x \end{cases} \quad (1)$$

Do $x, z \neq 0$ nên đặt $t = \frac{z}{x}$,

từ (1) ta được $5t^3 - 16t^2 + 20t - 16 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(5t^2 - 6t + 8) = 0$
 $\Leftrightarrow t = 2$ (do $5t^2 - 6t + 8 > 0$).

Từ đó $z = 2x$, vì vậy ta được hệ $\begin{cases} 2x^3 - 2x^2z + xz^2 = 2 \\ z = 2x \\ y = 2z - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y; z) = (1; 3; 2)$.

7. Bài 7 (2004 – VMO, Bảng B)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$ (1)

HD: Cách 1

Nhân hai vế của (2) với 3 rồi cộng vế với vế với (1), ta được

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3xy^2 - 24xy + 3y^2 &= 24y - 51x - 49 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3y^2(x + 1) - 24y(x + 1) + 48(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)((x + 1)^2 + 3y^2 - 24y + 48) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)((x + 1)^2 + 3(y - 4)^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu $x = -1$ thì thay vào (1), ta được $\begin{cases} y = -4 \\ y = 4 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = (-1; 4); (-1; -4)$.

Cách 2

Đặt $x + y = z$ và $x - y = t$, ta được $x = \frac{z+t}{2}; y = \frac{z-t}{2}$.

Từ hệ phương trình đã cho ta có hệ

$$\begin{cases} z^3 + t^3 = -98 \\ -3z^2 + 5t^2 = -9z - 25t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^3 - 27 = -t^3 - 125 & (1') \\ -3z^2 + 9z = -5t^2 - 25t & (2') \end{cases}$$

Nhân hai vế của (2') với 3 rồi cộng vế với vế với (1'), ta được

$$(z-3)^3 = -(t+5)^3 \Leftrightarrow z = -(t+2), \text{ thế lại vào (1')}, \text{ suy ra}$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = -5 \end{cases}$$

Từ đó, ta được hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = (-1; 4); (-1; -4)$.

8. Bài 8 (2006 – VMO, Bảng A)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 6} \cdot \log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6} \cdot \log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 2z + 6} \cdot \log_3(6 - x) = z \end{cases}$$

HD: Đk $x, y, z < 6$.

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} \log_3(6 - y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}} & (1) \\ \log_3(6 - z) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 2y + 6}} & (2) \\ \log_3(6 - x) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - 2z + 6}} & (3) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}}$ với $x < 6$, có $f'(x) = \frac{6-x}{(x^2 - 2x + 6)\sqrt{x^2 - 2x + 6}} > 0$ với

mọi $x < 6$, do đó $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 6)$.

Mặt khác, hàm số $g(x) = \log_3(6 - x)$ có $g'(x) = -\frac{1}{(6-x)\ln 3} < 0$ với mọi $x < 6$, do đó

$g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 6)$.

Giả sử $(x; y; z)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Không giảm tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x; y; z\}$ thì xảy ra hai trường hợp sau

Nếu $x \geq y \geq z$ thì do $f(x)$ là hàm đồng biến nên từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\log_3(6 - y) \geq \log_3(6 - z) \geq \log_3(6 - x).$$

Từ đó do $g(x)$ là hàm nghịch biến nên $x \geq z \geq y$, do đó $y = z$.

Thay $y = z$ vào (1) và (2), ta được $x = y = z$.

Nếu $x \geq z \geq y$ thì tương tự, ta được $x = y = z$.

Thay $x = y = z$ vào (1), (2) và (3) ta được $f(x) = g(x)$ (*).

Mà $f(x)$ đồng biến, $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 6)$ nên (*) có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(-\infty; 6)$.

Ta thấy $x = 3$ là nghiệm của (*).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y; z) = (3; 3; 3)$.

9. Bài 9 (2006 – VMO, Bảng B)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$$

HD: Giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.

$$\begin{aligned} \text{Nếu } x \geq y \geq z \text{ thì ta được } \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 \leq x \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 \geq z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)((x+2)^2 + 1) \leq 0 \\ (z-1)((z+2)^2 + 1) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ z \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } x \geq z \geq y \text{ thì tương tự, ta được } \begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}.$$

Cả hai trường hợp ta đều có $x = y = z = 1$.

Thử lại đúng, vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

10. Bài 10 (2007 – VMO)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \left(1 - \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases}.$$

HD: Đk $x > 0, y > 0, y + 3x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Với đk đó, hệ } &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{12}{y+3x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \\ 1 + \frac{12}{y+3x} = \frac{6}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = \frac{12}{y+3x} \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\text{Nhân (1) và (2) theo vế, ta được } \frac{9}{y} - \frac{1}{x} = \frac{12}{y+3x} \Leftrightarrow y^2 + 6xy - 27x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y = -9x \end{cases}.$$

Có $y = 3x$ thỏa mãn.

Thay vào (1), ta được $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{3x}} = 1$ và giải ra $(x; y) = (4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3})$.

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = (4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3})$.

11. Bài 11 (2009 – VMO)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases}.$$

$$\text{HD: Đk } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \quad (*)$$

Ta thấy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$\left(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2 \leq 2 \left(\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2}\right) \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } \frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} - \frac{2}{1+2xy} &= \frac{2(x-y)^2(2xy-1)}{(1+2x^2)(1+2y^2)(1+2xy)} \leq 0 \quad (\text{do } (*)) \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \leq \frac{2}{1+2xy} \quad (2). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

$$\text{Từ (1) và (2), ta được } \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

$$\text{Từ đó ta được hệ } \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{9-\sqrt{73}}{36} \\ x = y = \frac{9+\sqrt{73}}{36} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là } (x; y) = \left(\frac{9-\sqrt{73}}{36}; \frac{9-\sqrt{73}}{36}\right), \left(\frac{9+\sqrt{73}}{36}; \frac{9+\sqrt{73}}{36}\right).$$

Nhận xét: Có thể chứng minh rằng với $x, y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, phương trình thứ nhất của

hệ tương đương với $x = y$.

Khảo sát hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} - \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, trong đó y được coi là một điểm cố định thuộc đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

12. Bài 12 (2010 – VMO)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Chú ý: Đó chính là Ví dụ mở đầu.

II.3. Một số bài tập tự làm

Sau đây là một số Bài tập tự làm mà chúng ta có thể sử dụng các Phương pháp đã nói ở trên.

1. Bài 1

Giải các hệ phương trình

1.
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz - zx = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15 \\ (x-y)(x^2-y^2) = 3 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{51}{4} \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{771}{16} \end{cases}$$

2. Bài 2

Giải các hệ phương trình

1.
$$\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} zx = x + 4 \\ 2y^2 = 7zx - 3x - 14 \\ z^2 + x^2 = 35 - y^2 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz - zx = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$$

3. Bài 3

Giải các hệ phương trình

1.
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 8xy = 0 \\ \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 + \frac{4x}{y} = 22 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} (x+1)^3 = y^3 + 3xy^2 \\ (y-1)^3 = x^3 + 3x^2y \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} 1 + x^3y^3 - 19x^3 = 0 \\ y + xy^2 + 6x^2 = 0 \end{cases}$$

4. Bài 4

Giải các hệ phương trình

1.
$$\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8 \\ x(y^3 - 2) = 6 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ y^4 + 4(2x - 3)y^2 - 48y - 48x + 155 = 0 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y + 1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x^3 + y^2 = 2 \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0 \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} x\sqrt{x} - 8\sqrt{y} = \sqrt{x} + y\sqrt{y} \\ x - y = 5 \end{cases}$$

5. Bài 5

Giải các hệ phương trình

1.
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}.$$
2.
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6(x+1) \end{cases}.$$
3.
$$\begin{cases} 2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{x-2y} = x + 3y - 2 \end{cases}.$$
4.
$$\begin{cases} \sqrt{11x-y} - \sqrt{y-x} = 1 \\ 7\sqrt{y-x} + 6y - 26x = 3 \end{cases}.$$
5.
$$\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y \end{cases}.$$

6. Bài 6

Giải các hệ phương trình

1.
$$\begin{cases} x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \\ \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \end{cases}.$$
2.
$$\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + xy + \frac{3}{2} = 2^y \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y - 4x + 1 = 0 \end{cases}.$$
3.
$$\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}.$$
4.
$$\begin{cases} 3^{x^2+2} - 9^{2y^2+1} = 2(\sqrt{2y} - \sqrt{x}) \\ 3^{(x+y)^2+2} + 2\sqrt{x+y} = 29 \end{cases}.$$
5.
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y - 2 \\ \log_y \left(\frac{x-2}{y-1} \right) + \log_x \left(\frac{y-1}{x-2} \right) = (x-3)^3 \end{cases}.$$
6.
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x^2 + y^2 + x + y = 44 \end{cases}.$$

Phần kết luận

Sau một thời gian làm việc cẩn thận và nghiêm túc, tôi đã hoàn thành Chuyên đề với nhiều dạng Ví dụ và Bài tập về giải Hệ phương trình dành cho học sinh khá giỏi.

Thực tế, những Ví dụ và Bài tập này đã được chúng tôi dạy cho học sinh trong Đội tuyển học sinh giỏi Toán quốc gia của tỉnh Bắc Giang, dạy ôn thi Đại học đồng thời cũng đã dùng dạy ôn thi học sinh giỏi Toán lớp 9 cấp tỉnh và ôn thi vào lớp 10 Chuyên Toán – Tin của các trường THPT Chuyên rất hiệu quả.

Tôi thấy Chuyên đề rất thiết thực đối với các thầy cô dạy Chuyên Toán và các em học sinh của các lớp Chuyên Toán nói riêng đồng thời cũng rất thiết thực cho tất cả các thầy cô luyện thi và các em học sinh ôn thi môn Toán liên quan tới Hệ phương trình.

Tài liệu tham khảo

- [1]. *Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.*
- [2]. *Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4.*
- [3]. *Đề thi HSG quốc gia (VMO) lớp 12 THPT.*
- [4]. *Kỷ yếu Toán học Trại hè Hùng Vương.*
- [5]. *Kỷ yếu Toán học Khu vực Duyên Hải và Đồng Bằng Bắc Bộ.*

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.

Các bài toán về dãy số luôn phong phú và đa dạng, đặc biệt là các bài toán về dãy số nguyên. Trong chuyên đề này chúng tôi xin một số tính chất số học của dãy số nguyên: Tính chia hết, tính nguyên, tính chính phương,...

1. Tính chia hết trong dãy số nguyên

1.1. Sử dụng số hạng tổng quát của dãy để chứng minh tính chia hết trong dãy số nguyên.

Bài 1: Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 38, u_3 = -90 \\ u_{n+3} = 19u_{n+1} - 30u_n \end{cases}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Chứng minh rằng u_{2011} chia hết cho 2011

Bài giải

Xét phương trình đặc trưng của dãy: $x^3 - 19x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x+5) = 0$ (1)

Khi đó phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -5$

Do đó $u_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n + c_3 \cdot (-5)^n$

Từ điều kiện ban đầu $u_1 = 0; u_2 = 38; u_3 = -90$, khi đó ta tìm được $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.

Vậy $u_n = 2^n + 3^n + (-5)^n$

Với p là số nguyên tố bất kì, theo định lý Fermat ta có:
 $2^p \equiv 2 \pmod{p}; 3^p \equiv 3 \pmod{p}; (-5)^p \equiv (-5) \pmod{p}$

Do đó ta có: $u_p \equiv 2 + 3 - 5 = 0 \pmod{p}$

Với $p = 2011$ ta có u_{2011} chia hết cho 2011, bởi vì 2011 là số nguyên tố.

Bài 2

Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 50 \\ u_{n+1} = 4u_n + 5u_{n-1} - 1975, n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng u_{1996} chia hết cho 1997.

Bài giải:

Ta thấy công thức truy hồi của dãy là tuyến tính nhưng không thuần nhất, muốn tính số hạng tổng quát của dãy bằng phương pháp sai phân ta cần đưa về công thức truy hồi tuyến tính thuần nhất.

Muốn vậy ta đặt $u_n = v_n + c$ và ta cần phải xác định c để có công thức truy hồi $v_{n+1} = 4v_n + 5v_{n-1}$. Nhờ công thức này ta tính được số hạng tổng quát của dãy $\{v_n\}$, từ đó suy ra số hạng tổng quát của $\{u_n\}$.

Ta có

$$v_{n+1} + c = 4(v_n + c) + 5(v_{n-1} + c) - 1975$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = 4v_n + 5v_{n-1} + 8c - 1975.$$

Do đó $c = \frac{1975}{8}$. Khi đó dãy $\{v_n\}$ được xác định như sau

$$\begin{cases} v_1 = \frac{-1919}{8}; v_2 = \frac{-1575}{8} \\ v_{n+1} = 4v_n + 5v_{n-1}, n = 2, 3, 4 \dots \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng : $x^2 - 4x - 5 = 0$ có 2 nghiệm $x_1 = 5, x_2 = -1$ nên
 $v_n = c_1 5^n + c_2 (-1)^n$.

Cho $n = 1$ và $n = 2$ ta có:

$$\begin{cases} 5c_1 - c_2 = \frac{-1919}{8} \\ 25c_1 + c_2 = \frac{1575}{8} \end{cases}$$

Giải hệ pt này ta được $c_1 = \frac{-1747}{120}; c_2 = \frac{2005}{12}$, do đó

$$v_n = \frac{-1747}{120} \cdot 5^n + \frac{2005}{12} \cdot (-1)^n.$$

Vậy

$$u_n = \frac{-1747}{120} \cdot 5^n + \frac{2005}{12} \cdot (-1)^n + \frac{1975}{8}$$

Cho nên

$$\begin{aligned} u_{1996} &= \frac{-1747}{120} \cdot 5^{1996} + \frac{9935}{24} \\ &= \frac{-1747 \cdot 5^{1996} + 49675}{120}. \end{aligned}$$

Do 1997 là số nguyên tố nên $5^{1996} \equiv 1 \pmod{1997}$

$$\Rightarrow -1747 \cdot 5^{1996} + 49675 \equiv 0 \pmod{1997}$$

Lại có

$$\begin{aligned} 5^{1996} &= 25^{998} \equiv 1 \pmod{3} \\ \Rightarrow -1747 \cdot 5^{1996} + 49675 &\equiv -1747 + 49675 \equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} 5^{1996} &= 25^{998} \equiv 1 \pmod{8} \\ \Rightarrow -1747 \cdot 5^{1996} + 49675 &\equiv -1747 + 49675 \equiv 0 \pmod{8} \end{aligned}$$

Rõ ràng $-1747 \cdot 5^{1996} + 49675 \equiv 0 \pmod{5}$ mà $(3, 5, 8) = 1$

$$\Rightarrow (-1747.5^{1996} + 49675) \equiv 120.$$

Mặt khác $(120, 1997) = 1$ nên $\frac{-1747.5^{1996} + 49675}{120} \equiv 1997$ hay $u_{1996} \equiv 1997$

Bài 3 (60th Annual William Lowell Putnam Competition 1999)

Dãy số nguyên $\{u_n\}$ được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 24 \\ u_n = \frac{6u_{n-1}^2 \cdot u_{n-3} - 8u_{n-1} \cdot u_{n-2}^2}{u_{n-2} \cdot u_{n-3}}, n \geq 4. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $u_n \equiv n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Bài giải

Công thức truy hồi của dãy không tuyến tính nhưng bằng cách biến đổi thích hợp ta sẽ dẫn đến một dãy số khác có công thức truy hồi tuyến tính.

Ta làm như sau:

Từ công thức truy hồi của dãy ta có:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{6u_{n-1} \cdot u_{n-3} - 8u_{n-2}^2}{u_{n-2} \cdot u_{n-3}} = 6 \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} - 8 \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}}.$$

Đặt $v_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}$. Do vậy ta có dãy $\{v_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} v_2 = 2, v_3 = 12 \\ v_n = 6v_{n-1} - 8v_{n-2}, n \geq 4. \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng $x^2 - 6x + 8 = 0$ có 2 nghiệm $x_1 = 4, x_2 = 2$ nên

$$v_n = c_1 4^n + c_2 2^n.$$

Cho $n = 2$ và $n = 3$ ta có:

$$\begin{cases} 16c_1 + 4c_2 = 2 \\ 64c_1 + 8c_2 = 12. \end{cases}$$

Giải hệ pt này ta được $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{-1}{2}$.

Do đó

$$v_n = 4^{n-1} - 2^{n-1}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} u_n &= v_n \cdot v_{n-1} \cdots v_2 \\ &= (4^{n-1} - 2^{n-1}) \cdot (4^{n-2} - 2^{n-2}) \cdots (4 - 2) \\ &= 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdots 2 \cdot (2^{n-1} - 1) \cdot (2^{n-2} - 1) \cdots (2 - 1) \end{aligned}$$

Theo định lý Fermat nhỏ với mọi số nguyên tố lẻ p ta luôn có $(2^{p-1} - 1) \equiv p$

và nếu $p = 2$ thì $(2^{p-1} - 1) \equiv p$.

Vậy $(2^{p-1} - 1) \equiv p$, với mọi số nguyên tố p và nếu s là bội của $p - 1$ thì

$(2^s - 1) \equiv p$.

Với n nguyên dương tùy ý ta luôn có $n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k} \cdot p_i \in P, \forall i = \overline{1, k}$.

$$\Rightarrow n \nmid p_1^{s_1} \Rightarrow n \nmid p_1, p_1^2, \dots, p_1^{s_1},$$

hay

$$n = p_1 \cdot d_1 = p_1^2 \cdot d_2 = \dots = p_1^{s_1} \cdot d_{s_1} \text{ với } d_1 > d_2 > \dots > d_{s_1} \geq 1$$

Suy ra

$$n - d_1 = d_1(p_1 - 1) \nmid (p_1 - 1) \Rightarrow (2^{n-d_1} - 1) \nmid p_1.$$

$$n - d_2 = d_2(p_1^2 - 1) \nmid (p_1^2 - 1) \Rightarrow (2^{n-d_2} - 1) \nmid p_1.$$

$$n - d_{s_1} = d_{s_1}(p_1^{s_1} - 1) \nmid (p_1^{s_1} - 1) \Rightarrow (2^{n-d_{s_1}} - 1) \nmid p_1.$$

Vậy $(2^{n-d_1} - 1)(2^{n-d_2} - 1) \dots (2^{n-d_{s_1}} - 1) \nmid p_1^{s_1}$. Do đó $u_n \nmid p_1^{s_1}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $u_n \nmid p_i^{s_i}, \forall i = 2, \dots, i$. Do đó

$$u_n \text{ chia hết cho } n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Bài 4

Dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n, n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì dãy các tổng tương ứng

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} \text{ chia hết cho } p.$$

Bài giải

Tương tự bài 2 ta cũng biến đổi dãy đã cho để đưa về một dãy khác mà việc tính số hạng tổng quát của nó đơn giản hơn như sau:

Trước hết ta có:

$$\begin{aligned} a_n + n^3 &= 3a_{n-1} + 3(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) \\ &= 3(a_{n-1} + (n-1)^3). \end{aligned}$$

Đặt $u_n = a_n + n^3$ thì (u_n) là cấp số nhân công bội 3 với $u_1 = a_1 + 1 = 3$.

Suy ra

$$u_n = 3^{n-1} \cdot u_1 = 3^n \Rightarrow a_n = 3^n - n^3.$$

Vậy

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} &= 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{p-1} - (1^3 + 2^3 + \dots + (p-1)^3) \\ &= \frac{3^p - 3}{2} - (1^3 + 2^3 + \dots + (p-1)^3). \end{aligned}$$

- Nếu $p = 2$ hiển nhiên $a_1 \nmid 2$.

- Nếu $p \geq 3$ thì p lẻ nên $p - 1$ chẵn.

Khi đó ta có $(k^3 + (p-k)^3) \nmid p, k = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$.

$$\Rightarrow (1^3 + 2^3 + \dots + (p-1)^3) \nmid p.$$

Mặt khác theo định lý Fermat nhỏ $(3^p - 3) \nmid p$ nếu $p > 3$ còn nếu $p = 3$ hiển nhiên $(3^3 - 3) \nmid 3$. Do đó

$$(3^p - 3) \nmid p, \forall p \in P, p \geq 3.$$

Hơn nữa $(3^p - 3) \nmid 2$; $(2, p) = 1$ nên $\frac{3^p - 3}{2} \nmid p$. Do vậy ta có đpcm.

Bài 5

Cho λ là nghiệm dương của phương trình $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Dãy $x_0, x_1, x_2, \dots$

được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = [\lambda x_n], n \geq 0 \end{cases}$$

Tìm số dư của x_{1998} cho 1998.

Bài giải

Bài toán này lại có một cách tìm số hạng tổng quát hết sức đặc biệt, đó là dựa vào tính chất về phần nguyên của một số rồi biến đổi bất đẳng thức ta sẽ đạt được kết quả mong muốn.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 1998\lambda - 1 &= 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1998\lambda + 1 \\ \Rightarrow \lambda &= 1998 + \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \lambda x_n = 1998x_n + \frac{x_n}{\lambda}$$

Dễ thấy x_n là dãy số nguyên dương, do đó ta có:

$$\begin{aligned} [\lambda x_n] &= [1998x_n + \frac{x_n}{\lambda}] \\ &= 1998x_n + \left[\frac{x_n}{\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Vì $x_n = [x_{n-1}]$ nên $x_n < \lambda x_{n-1} < x_n + 1$ (do λ là số vô tỉ nên $\lambda x_{n-1} \notin \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow \frac{x_n}{\lambda} < x_{n-1} < \frac{x_n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

Hay

$$x_{n-1} - \frac{1}{\lambda} < \frac{x_n}{\lambda} < x_{n-1}.$$

Dễ thấy phương trình $t^2 - 1998t - 1 = 0$ luôn có 2 nghiệm trái dấu mà tổng của chúng bằng 1998 nên nghiệm dương $\lambda > 1$,

$$\Rightarrow x_{n-1} - 1 < x_{n-1} - \frac{1}{\lambda}$$

Vậy ta có $x_{n-1} < \frac{x_n}{\lambda} < x_{n-1} \Rightarrow \left\lfloor \frac{x_n}{\lambda} \right\rfloor = x_{n-1} - 1$.

Do đó $x_{n+1} = [\lambda x_n] = 1998x_n + x_{n-1} - 1$. Suy ra

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv x_{n-1} - 1 \pmod{1998} \\ &\equiv x_{n-3} - 2 \pmod{1998} \\ &\vdots \\ &\equiv x_{n-2k-1} - (k+1) \pmod{1998}. \end{aligned}$$

Vậy $x_{1998} \equiv x_1 - 999 \pmod{1998}$ trong đó $x_1 = [\lambda] = 1998$ cho nên

$$x_{1998} \equiv 999 \pmod{1998}.$$

Bài 6(Bulg. MO 1999)

Cho dãy số nguyên $\{a_n\}$ thỏa

$$(n-1)a_{n+1} = (n+1)a_n - 2(n-1), \quad \forall n \geq 1$$

Giả sử a_{1999} chia hết cho 2000, tìm số n nhỏ nhất ($n \geq 2$) sao cho a_n chia hết cho 2000.

Bài giải

Trước hết ta xác định công thức tổng quát của a_n .

Ta thấy rằng dãy $a_n = 2n - 2$ thỏa mãn công thức truy hồi cho trong bài và một suy nghĩ rất tự nhiên là đặt $a_n = b_n + 2n - 2$. Công việc còn lại là xác định công thức tổng quát của b_n . Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} (n-1)(b_{n+1} + 2n) &= (n+1)(b_n + 2n - 2) - 2(n-1) \\ \Rightarrow (n-1)b_{n+1} &= (n+1)b_n. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $b_3 = 3b_2$; $b_4 = 6b_2$, $b_5 = 10b_2$ và tổng quát lên ta được

$$b_n = \frac{n(n-1)}{2} b_2, \quad \forall n \geq 2.$$

Công thức này dễ dàng chứng minh được bằng phương pháp quy nạp.

Vậy ta có:

$$a_n = 2(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} c, \quad \forall n \geq 2 \quad (c = \text{const}).$$

Với $n = 2$ ta có $c = a_2 - 2$ là số nguyên.

Theo giả thiết $a_{1999} \equiv 0 \pmod{2000}$ nên ta có:

$$\begin{aligned} 2(1999-1) + \frac{1999 \cdot 1998}{2} c &\equiv 0 \pmod{2000} \\ \Rightarrow c &\equiv 4 \pmod{2000}. \end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned} a_n \equiv 0 \pmod{2000} &\Leftrightarrow 2(n-1) + 2n(n-1) \equiv 0 \pmod{2000} \\ &\Leftrightarrow (n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod{1000} \end{aligned}$$

Ta thấy $(n-1)(n+1) \equiv 8 \pmod{125} \Leftrightarrow n$ lẻ và $(n-1)(n+1) \equiv 1 \pmod{125}$ khi $n-1$ hoặc $n+1$ chia hết cho 125.

Do đó số tự nhiên $n \geq 2$ nhỏ nhất thoả mãn là 249.

1.2 .Sử dụng phương pháp quy nạp toán học

Bài 1

Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + 1, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Chúng minh rằng: $u_{2008} \equiv 3 \pmod{4}$.

Bài giải

Trước hết ta tính một số số hạng đầu tiên của dãy

$$1; 1; 2; 3; 7; 22; 155; 3411; 528706, \dots$$

Câu hỏi đặt ra là phải chăng ngoại trừ 2 số hạng đầu các số còn lại của dãy đều chia 4 dư 2 hoặc dư 3?

Ta thấy u_2, u_5, u_8 chia 4 dư 2 còn u_3, u_4, u_6, u_7 chia 4 dư 3. Ta sẽ chứng minh:

$$\begin{cases} u_n \equiv 2 \pmod{4} \text{ nếu } n = 3k + 2 \\ u_n \equiv 3 \pmod{4} \text{ nếu } n \neq 3k + 2. \end{cases}$$

bằng phương pháp quy nạp theo k.

Ta thấy mệnh đề đúng với $k = 0, 1, 2$.

Giả sử mệnh đề đúng đến $k = p$, ta chứng minh nó cũng đúng đến $k = p + 1$.

Thật vậy

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \quad u_{3(p+1)+2} &= u_{3p+5} = u_{3p+4} \cdot u_{3p+3} + 1 \\ u_{3(p+1)+1} &= u_{3p+4} = u_{3p+3} \cdot u_{3p+2} + 1 \\ u_{3(p+1)+3} &= u_{3p+6} = u_{3p+5} \cdot u_{3p+4} + 1 \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp $u_{3p+4} \equiv 3 \pmod{4}$

$$u_{3p+3} \equiv 3 \pmod{4}$$

$$u_{3p+2} \equiv 2 \pmod{4}$$

$$u_{3p+5} \equiv 2 \pmod{4},$$

nên

$$u_{3(p+1)+2} \equiv 2 \pmod{4}$$

$$u_{3(p+1)+1} \equiv 3 \pmod{4}$$

$$u_{3(p+1)+3} \equiv 3 \pmod{4}.$$

Vậy $u_n \equiv 3 \pmod{4}$ nếu n chia hết cho 3 hoặc chia 3 dư 1.

Do 2008 chia 3 dư 1 nên $u_{2008} \equiv 3 \pmod{4}$ (đpcm).

Bài 2

Chứng minh rằng: Tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn $(2^n + 1) \mid m$.

Bài giải

Thoạt nhìn bài toán này không thấy xuất hiện bóng dáng của dãy số nhưng ta có thể tạo ra một dãy số có công thức truy hồi $x_{k+1} = 2^{x_k} + 1$, $\forall k \geq 0$ và chứng minh mỗi số hạng của nó đều chia hết cho số liền trước nó.

Xét dãy $\{x_k\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = 2^{x_k} + 1, \forall k \geq 0. \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh $x_{k+1} \mid x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ bằng phương pháp quy nạp.

- Hiển nhiên mệnh đề đúng với $k = 0, k = 1$.

- Giả sử $(2^{x_k} + 1) \mid x_k$, ta sẽ chứng minh $(2^{x_{k+1}} + 1) \mid x_{k+1}$.

Thật vậy:

Do $x_{k+1} = 2^{x_k} + 1 \mid x_k$ mà $2^{x_k} + 1$ là số lẻ nên $x_{k+1} = m_k x_k$ (với m_k lẻ).

Khi đó ta có $(2^{x_{k+1}} + 1) = 2^{m_k x_k} + 1 = ((2^{x_k})^{m_k} + 1) \mid (2^{x_k} + 1)$.

hay $(2^{x_{k+1}} + 1) \mid x_{k+1}$

Mặt khác ta thấy $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ nên dãy $\{x_k\}$ gồm vô số nguyên dương phân biệt do đó tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn $(2^n + 1) \mid m$.

Bài 3

Chứng minh rằng: Với một số nguyên dương $a > 2$ tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn $(a^n - 1) \mid m$.

Bài giải

Ta sẽ chứng minh dãy $\{x_k\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = a^{x_k} + 1, \forall k \geq 0. \end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện $(a^{x_k} - 1) \mid x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Thật vậy:

- Với $k = 0, k = 1$ mệnh đề đúng.

- Giả sử $(a^{x_k} - 1) \mid x_k$ tức là $x_{k+1} = m_k x_k$ ($m_k \in \mathbb{N}$). Khi đó

$$\begin{aligned} (a^{x_{k+1}} - 1) &= (a^{m_k x_k} - 1) \\ &= ((a^{x_k})^{m_k} - 1) \mid (a^{x_k} - 1) \end{aligned}$$

hay $(a^{x_{k+1}} - 1) \mid x_{k+1}$

Vì dãy $\{x_k\}$ là dãy tăng vô hạn nên tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn $(a^n - 1) \mid m$.

Bài 4 (Balkan MO 1990).

Dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_2 = 3 \end{cases}$$

$$u_n = (n+1)u_{n-1} - nu_{n-2} \forall n \geq 3.$$

Tìm các số hạng của dãy chia hết cho 11.

Bài giải

Ta sẽ chứng minh $u_n \equiv 0 \pmod{11}, \forall n \geq 10$ bằng quy nạp.

Thật vậy: Bằng tính toán trực tiếp ta có 11 số hạng đầu của dãy như sau

$$1, 2, 9, 33, 153, 873, 5913, 46233, 409113, 4037913, 43954713.$$

Vậy u_{10} và u_{11} đều chia hết cho 11.

Giả sử u_{n-2} và u_{n-1} chia hết cho 11, $n \geq 12$.

Khi đó do $u_n = (n+1)u_{n-1} - nu_{n-2}$ nên u_n cũng chia hết cho 11.

Vậy $u_n \equiv 0 \pmod{11}, \forall n \geq 10$.

1.3. Sử dụng tính tuần hoàn của dãy số

Bài 1: Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 5, u_2 = 11 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n \end{cases}; n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng: u_{2007} chia hết cho 11

Bài giải

Ta thấy $u_1 = 5; u_2 = 11; u_3 = 7; u_4 = -19; u_5 = -59; u_6 = -61$

Nên ta có: $u_1 \equiv 5 \pmod{11}; u_2 \equiv 0 \pmod{11}; u_3 \equiv 7 \pmod{11}; u_4 \equiv 3 \pmod{11}; u_5 \equiv 7 \pmod{11}$

Vì vậy nếu gọi r_n là phần dư của u_n trong phép chia cho 11, $n=1,2,3,\dots$ thì từ trên ta suy ra $r_1 = 5; r_2 = 0; r_3 = 7; r_4 = 3; r_5 = 7$. Ta sẽ chứng minh với mọi $k=1,2,3,\dots$

$r_{5k+1} = 5; r_{5k+2} = 0; r_{5k+3} = 7; r_{5k+4} = 3; r_{5k+5} = 7$. Để làm điều này ta sẽ chứng minh bằng qui nạp toán học. Theo nhận xét ở trên thì $k=1$ đúng, giả sử (1) đúng với $n=p$, tức là:

$$r_{5p+1} = 5; r_{5p+2} = 0; r_{5p+3} = 7; r_{5p+4} = 3; r_{5p+5} = 7$$

Xét khi $k=p+1$. Ta có: $u_{5(p+1)+1} = u_{5p+6}$, theo cách xác định của dãy ta có

$$u_{5(p+1)+1} = u_{5p+6} = 2u_{5p+5} - 3u_{5p+4} \quad (2)$$

Theo gt qui nạp ta có: $r_{5p+5} = 7 \Rightarrow r_{5p+5} \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow u_{5p+5} = 7 + 11l; (l \in \mathbb{Z})$

$r_{5p+4} = 3 \Rightarrow r_{5p+4} \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow u_{5p+4} = 3 + 11s; (s \in \mathbb{Z})$, thay lại vào (2) ta có

$$u_{5p+6} = 2(7 + 11l) - 3(3 + 11s) = 5 + 11(2l - 3s); k, l \in \mathbb{Z}, \text{ khi đó suy ra } u_{5p+6} \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow r_{5p+6} = 5$$

Bằng cách lập luận hoàn tương tự suy ra $r_{5(p+1)+2} = 0; r_{5(p+1)+3} = 7; r_{5(p+1)+4} = 3; r_{5(p+1)+5} = 7$

Nên nhận xét (1) đúng với $k=p+1$

Ta có $2007 = 401 \cdot 5 + 2$, do đó $r_{2007} = 0$, điều đó có nghĩa là u_{2007} chia hết cho 11

Bài 2

Gọi a là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Xét dãy $\{x_n\}$ xác định theo công thức sau:

$$x_n = [a^n] + [a^{n+1}], n = 1, 2, 3, \dots$$

Tìm số dư trong phép chia x_{2007} cho 17.

Bài giải:

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Ta có

$$f(-1) = -3 < 0$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} > 0$$

$$f(1) = -1 < 0$$

$$f(2\sqrt{2}) = 16\sqrt{2} - 23 < 0$$

$$f(3) = 1 > 0.$$

Do hàm $f(x)$ liên tục nên phương trình $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. $x_1 \in (-1; \frac{-1}{2})$, $x_2 \in (\frac{1}{2}; 1)$, $x_3 = a \in (2\sqrt{2}; 3)$.

Đặt $u_n = x_1^n + x_2^n + a^n, n \in \mathbb{N}$. Khi đó u_n là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất có phương trình đặc trưng là $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

Do đó ta có:

$$u_{n+3} - 3u_{n+2} + u_n = 0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+3} = 3u_{n+2} - u_n$$

Trong đó

$$u_0 = 3$$

$$u_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$u_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 9$$

(sử dụng định lý Viet ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$)

Do đó $u_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vì $x_1 + x_2 = 3 - x_3 > 0$ nên $x_2 > -x_1 = |x_1| > 0$

$$\Rightarrow x_2^n > |x_1|^n \geq -x_1^n \Rightarrow x_1^n + x_2^n > 0.$$

Ta lại có

$$x_1 \in (-1; \frac{-1}{2}), x_2 \in (\frac{1}{2}; 1)$$

nên

$$x_1^n + x_2^n < x_1^2 + x_2^2 = 9 - x_3^2 = 1 + (8 - x_3^2) < 1 \text{ (do } x_3 > 2\sqrt{2}).$$

Vậy

$$a_n = u_n - (x_1^n + x_2^n) = (u_n - 1) + (1 - x_1^n - x_2^n)$$

$$\Rightarrow [a^n] = u_n - 1.$$

Cho nên $x_n = u_n - 1 + u_{n+1} - 1 = u_{n+1} + u_n - 2$

$$\Rightarrow x_{2007} = u_{2008} + u_{2007} - 2.$$

Gọi r_n là số dư trong phép chia u_n cho 17. Khi đó $r_n \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}, \forall n \geq 0$ tức là dãy $\{r_n\}$ bị chặn.

Ngoài ra từ công thức truy hồi của dãy $\{u_n\}$ ta cũng có:

$r_{n+3} \equiv 3r_{n+2} - r_n \pmod{17}$ suy ra dãy $\{r_n\}$ tuần hoàn. Bằng tính toán trực tiếp ta có:

$$r_0 = 3, r_1 = 3, r_2 = 9, r_3 = 7, r_4 = 1, r_5 = 11, r_6 = 9$$

$$r_7 = 9, r_8 = 16, r_9 = 5, r_{10} = 6, r_{11} = 2, r_{12} = 1$$

$$r_{13} = 14, r_{14} = 6, r_{15} = 0, r_{16} = 3, r_{17} = 3, r_{18} = 9.$$

Dễ kiểm tra $\{r_n\}$ có chu kì 16, nghĩa là $u_n \equiv u_{n+16} \pmod{17}, \forall n \in \mathbb{N}$. Vậy

$$u_{2007} = u_{125 \cdot 16 + 7} \equiv u_7 \equiv 9 \pmod{17}$$

$$u_{2008} = u_{125 \cdot 16 + 8} \equiv u_8 \equiv 16 \pmod{17}$$

$$\Rightarrow x_{2007} \equiv 9 + 16 - 2 \equiv 6 \pmod{17}$$

Vậy x_{2007} chia 17 dư 6.

Bài 3 (BMO 1998): Cho $a_1 = 19, a_2 = 98$. Với $n \geq 1, a_{n+2}$ là số dư của phép chia $a_n + a_{n+1}$ cho 100. Tìm số dư trong phép chia $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1998}^2$ cho 8.

Bài giải

Gọi r_n là số dư trong phép chia a_n cho 4.

Theo giả thiết ta có $a_n + a_{n+1} \equiv a_{n+2} \pmod{100}$ nên

$$a_n + a_{n+1} \equiv a_{n+2} \pmod{4}$$

$$\Rightarrow r_n + r_{n+1} \equiv r_{n+2} \pmod{4}.$$

Mặt khác $r_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ tức là dãy $\{r_n\}$ bị chặn do đó dãy $\{r_n\}$ tuần hoàn.

Ta tính được

$$r_1 = 3, r_2 = 2, r_3 = 1, r_4 = 3, r_5 = 0, r_6 = 3, r_7 = 3, r_8 = 2, r_9 = 1.$$

Dễ kiểm tra $\{r_n\}$ có chu kì 6, nghĩa là $r_n = r_{n+6}, \forall n \geq 1$.

Lại có $a_n^2 - r_n^2 = (a_n - r_n)(a_n + r_n)$. Do $(a_n - r_n) \equiv 0 \pmod{4}$ nên a_n, r_n đồng tính chẵn lẻ

$$\Rightarrow (a_n + r_n) \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\Rightarrow (a_n^2 - r_n^2) \equiv 0 \pmod{8}$$

hay $a_n^2 \equiv r_n^2 \pmod{8}$. Vậy $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1998}^2 \equiv r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{1998}^2 \pmod{8}$.

Mà $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{1998}^2 = 333(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_6^2) = 333(9 + 4 + 1 + 9 + 0 + 9) \equiv 0 \pmod{8}$

Do đó $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1998}^2$ chia hết cho 8.

Bài 4 (VMO 1995)

Cho dãy $\{a_n\}, n = 0, 1, 2, \dots$ xác định bởi $a_0 = 1, a_1 = 3$ và

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 9a_n & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1995}^{2000} a_i^2$ chia hết cho 20.

Bài giải

Từ công thức truy hồi của dãy ta dễ thấy $a_{n+2} \equiv (a_{n+1} + a_n) \pmod{4}$.

Gọi r_n là số dư của phép chia a_n cho 4, khi đó $0 \leq r_n \leq 3$.

Hơn nữa $r_{n+2} \equiv (r_{n+1} + r_n) \pmod{4}$ nên tương tự **bài 2** dãy $\{r_n\}$ tuần hoàn với chu kỳ 6.

Ta có $a_n \equiv r_n \pmod{4}$ nên $a_n^2 \equiv r_n^2 \pmod{4}$. Vì vậy

$$\sum_{i=1995}^{2000} a_i^2 \equiv \sum_{i=1995}^{2000} r_i^2 \equiv (1 + 9 + 0 + 9 + 9 + 4) \equiv 0 \pmod{4}$$

tức là $\sum_{i=1995}^{2000} a_i^2 \equiv 0 \pmod{4}$. Mặt khác với $k \geq 0$ ta có: $a_{2k+4} \equiv (a_{2k+3} - a_{2k+2}) \pmod{5}$;

$$a_{2k+3} \equiv -a_{2k+2} \pmod{5} \Rightarrow a_{2k+4} \equiv -2a_{2k+2} \pmod{5}, \quad a_{2k+2}^2 \equiv a_{2k+3}^2 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow a_{2k+4}^2 \equiv 4a_{2k+2}^2 \equiv -a_{2k+2}^2 \equiv -a_{2k+3}^2 \pmod{5} \Rightarrow (a_{2k+4}^2 + a_{2k+3}^2) \equiv 0 \pmod{5}$$

Vậy $\sum_{i=1995}^{2000} a_i^2 = (a_{1995}^2 + a_{1996}^2) + (a_{1997}^2 + a_{1998}^2) + (a_{1999}^2 + a_{2000}^2) \equiv 0 \pmod{5}$. Vì $(4, 5) = 1$ nên $\sum_{i=1995}^{2000} a_i^2 \equiv 0 \pmod{20}$ (đpcm).

4. Tính nguyên và tính chính phương

Bài 1: Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 2 \end{cases}; n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Đặt: } S_n = (u_1^2 + 1)(u_2^2 + 1)(u_3^2 + 1) \dots (u_n^2 + 1) - 1; n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng: S_n là số chính phương với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

Bài giải

Ta đi chứng minh qui nạp: $S_n = (u_{n+1} - 1)^2$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$ (1)

Ta thấy $n = 1$ thỏa mãn (1)

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, tức là $S_k = (u_{k+1} - 1)^2$ (2)

Ta có

$$S_{k+1} = (u_1^2 + 1)(u_2^2 + 1) \dots (u_{k+1}^2 + 1) - 1 = (S_k + 1)(u_{k+1}^2 + 1) - 1 \quad (3)$$

Thay (2) vào (3) ta có:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= [(u_{k+1} - 1)^2 + 1](u_{k+1}^2 + 1) - 1 = [(u_{k+1}^2 + 1)^2 - 2u_{k+1} + 1](u_{k+1}^2 + 1) - 1 \\ &= (u_{k+1}^2 + 1)^2 - 2u_{k+1}(u_{k+1}^2 + 1) + (u_{k+1}^2 + 1) - 1 = (u_{k+1}^2 + 1)^2 - 2u_{k+1}(u_{k+1}^2 + 1) + u_{k+1}^2 \\ &= (u_{k+1}^2 + 1 - u_{k+1})^2 \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$u_{k+1}^2 + 1 - u_{k+1} = u_{k+1}(u_{k+1} - 1) + 1 = [u_{k+1}(u_{k+1} - 1) + 2] - 1 = u_{k+2} - 2$$

$$\Rightarrow S_{k+1} = (u_{k+2} - 1)^2$$

Nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 2: Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi công thức:

$$a_1 = 1, a_2 = -1$$

$$a_{n+2} = -a_{n+1} - 2a_n, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng: $\forall n \geq 2, 2^{n+1} - 7a_{n-1}^2$ là số chính phương.

Bài giải Đặt $u_n = 2^{n+2} - 7a_n^2$. Ta tính được $a_3 = -1, a_4 = 3, a_5 = -1, a_6 = -5$. Do đó:

$$u_1 = 2^3 - 7a_1^2 = 1 = (2(-1) + 1)^2,$$

$$u_2 = 2^4 - 7a_2^2 = 9 = (2(-1) - 1)^2,$$

$$u_3 = 2^5 - 7a_3^2 = 25 = (2.3 - 1)^2,$$

$$u_4 = 2^6 - 7a_4^2 = 1 = (2.(-1) + 3)^2,$$

$$u_5 = 2^7 - 7a_5^2 = 121 = (2.(-5) - 1)^2.$$

Ta sẽ chứng minh $u_n = (2a_{n+1} + a_n)^2$ bằng quy nạp.

Giả sử $2^{n+2} - 7a_n^2 = (2a_{n+1} + a_n)^2$. Ta sẽ chứng minh:

$$u_{n+1} = 2^{n+3} - 7a_{n+1}^2 = (2a_{n+2} + a_{n+1})^2.$$

Thật vậy: Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$2^{n+2} - 7a_n^2 = 4a_{n+1}^2 + 4a_{n+1}a_n + a_n^2$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+2} = 4a_{n+1}^2 + 8a_{n+1}a_n + 4a_{n+1}a_n$$

$$\Leftrightarrow 2^n = a_{n+1}^2 + 2a_n^2 + a_{n+1}a_n.$$

$$\text{Do đó } 2^{n+3} - 7a_{n+1}^2 = 2^3(a_{n+1}^2 + 2a_n^2 + a_{n+1}a_n) - 7a_{n+1}^2$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = a_{n+1}^2 + 16a_n^2 + 8a_{n+1}a_n \quad \Leftrightarrow u_{n+1} = (a_{n+1} + 4a_n)^2.$$

$$\text{Thay } 2a_n = -a_{n+1} - a_{n+2} \text{ ta được: } u_{n+1} = (a_{n+1} + 2(-a_{n+1} - a_{n+2}))^2 = (2a_{n+2} + a_{n+1})^2$$

Vậy $u_n = (2a_{n+1} + a_n)^2$ mà $\{a_n\}$ là dãy số nguyên nên u_n là số chính phương.

Bài 3 Cho dãy $\{a_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $2a_n a_{n+1} + 1$ là số chính phương.

Bài giải

Xét phương trình đặc trưng $x^2 - 4x + 1 = 0$ có 2 nghiệm

$$x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

nên số hạng tổng quát của dãy được xác định như sau:

$$a_n = c_1(2 + \sqrt{3})^n + c_2(2 - \sqrt{3})^n.$$

Lần lượt cho $n = 1, n = 2$ ta có:

$$\begin{cases} c_1(2 + \sqrt{3}) + c_2(2 - \sqrt{3}) = 1 \\ c_1(2 + \sqrt{3})^2 + c_2(2 - \sqrt{3})^2 = 4. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được : $c_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}, c_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Do đó ta có
$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}.$$

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Niuton ta có:

$$\begin{cases} (2 + \sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3} \\ (2 - \sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}, \end{cases}$$

ở đây A_n và B_n là các số nguyên và hiển nhiên ta có $a_n = B_n$

Ta lại có

$$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = (2 + \sqrt{3})(A_n + B_n\sqrt{3}) = (2A_n + 3B_n) + (A_n + 2B_n)\sqrt{3},$$

$$(2 - \sqrt{3})^{n+1} = (2 - \sqrt{3})(A_n - B_n\sqrt{3}) = (2A_n - 3B_n) - (A_n + 2B_n)\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{(2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}} = A_n + 2B_n.$$

Vậy $2a_n a_{n+1} + 1 = 2B_n(A_n + 2B_n) + 1 = 2A_n B_n + 4B_n^2 + A_n^2 - 3B_n^2 = (A_n + B_n)^2.$

Do đó $2a_n a_{n+1} + 1$ là số chính phương.

Bài 4 (Balkan MO 2002).

Cho dãy $\{a_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} a_1 = 20, a_2 = 30 \\ a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}, \forall n \geq 3. \end{cases}$$

Tìm n sao cho $5a_{n+1}a_n + 1$ là số chính phương.

Bài giải

Ta sẽ chứng minh $5a_{n+1}a_n + 1 = (a_n + a_{n+1})^2 + 501$ bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 1$ ta có $5a_2a_1 + 1 = 3001 = (20 + 30)^2 + 501 = (a_1 + a_2)^2 + 501.$

Vậy mệnh đề đúng với $n = 1.$

- Giả sử $5a_n a_{n-1} + 1 = (a_{n-1} + a_n)^2 + 501.$ Ta cần chứng minh

$$5a_{n+1}a_n + 1 = (a_n + a_{n+1})^2 + 501.$$

Thật vậy:

$$\text{Vì } a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1} - 1 \Rightarrow 5a_n = a_{n+1} + 2a_n + a_{n-1}.$$

$$\text{Xét } (5a_{n+1}a_n + 1) - (5a_na_{n-1} + 1) = 5a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) = (a_{n+1} + 2a_n + a_{n-1})(a_{n+1} - a_{n-1})$$

$$= ((a_{n+1} + a_n) + (a_n + a_{n-1}))((a_{n+1} + a_n) + (a_n - a_{n-1})) = (a_{n+1} + a_n)^2 - (a_n + a_{n-1})^2.$$

Thay $(a_{n-1} + a_n)^2 = 5a_na_{n-1} - 500$; ta có đpcm.

Ta thấy $m^2 < m^2 + 501 < (m+1)^2 \forall m > 250$ do đó $m^2 + 501$ không thể là số chính phương.

Từ công thức truy hồi của dãy ta có $a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1})$ đồng thời vì $a_2 > a_1$ nên dễ dàng suy ra $a_{n+1} > a_n, \forall n$.

Lại có $a_3 = 70, a_4 = 180 \Rightarrow a_n + a_{n+1} > 2a_n \geq 360, \forall n \geq 4$ do đó $(a_n + a_{n+1})^2 + 501$ không là số chính phương, $\forall n \geq 4$.

- Với $n = 1$ thì $5a_2a_1 + 1 = 3001$ không là số chính phương.

- Với $n = 2$ thì $5a_3a_2 + 1 = 10501$ không là số chính phương.

- Với $n = 3$ thì $5a_4a_3 + 1 = 63001 = 251^2$.

Vậy với $n = 3$ thì thỏa mãn $5a_{n+1}a_n + 1$ là số chính phương.

BÀI TẬP:

Bài 1: Cho dãy số $\{u_n\}; n = 1, 2, 3, \dots$ là dãy các số nguyên dương, (u_n) là dãy số tăng;

$U_{2n} = u_n + n$; u_n là số chính phương thì n là số chính phương

Tính u_{2012}

Bài 2: Cho dãy số (x_n) xác định như sau: $x_1 = 1; x_2 = 2011$; và $x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n$

Chứng minh rằng: $\frac{x_{2012} + 1}{2012}$ là số chính phương

Bài 3: Dãy $\{y_n\}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = 1 \\ y_{n+2} = (4k-5)y_{n+1} - y_n + 4 - 2k, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Xác định tất cả các số nguyên k sao cho mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

Bài 4: (IMO 1989-Longlisted Problems) Chứng minh rằng: Dãy $\{a_n\}$ cho bởi $a_n = [n\sqrt{2}] \forall n \in \mathbb{N}$ chứa vô số số chính phương.

Bài 5: Dãy $\{a_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 5 \\ a_{n+2} = 98a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\frac{a_n + 1}{6}$ là số chính phương.

Bài 6: Dãy $\{a_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}] \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng: a_n là số chính phương khi và chỉ khi $n = 2^k + k - 2, k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 7: Cho $a, b \in \mathbb{Z}$, dãy $\{a_n\}$ được xác định như sau

$$\begin{cases} a_0 = a, a_1 = b, a_2 = 2b - a + 2 \\ a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n, n \geq 0. \end{cases}$$

Tìm a, b để a_n là số chính phương, $\forall n \geq 1996$.

Bài 8: (China TST for IMO 2004) Dãy $\{c_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 2005 \\ c_{n+2} = -3c_n - 4c_{n-1} + 2008, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $a_n = 5(c_{n+2} - c_n)(502 - c_{n-1} - c_{n-2}) + 4^n \cdot 2004 \cdot 501, n \geq 2$.

Hỏi a_n có phải là số chính phương, $\forall n \geq 3$ hay không?

Bài 9: Dãy $\{a_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} a_0 = a, a_1 = b, a_2 = c (a, b, c \in \mathbb{Z}) \\ a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tìm $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $4a_n a_{n+1} + k$ là số chính phương, $\forall n \in \mathbb{N}$

Bài 10: Dãy $\{a_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = (4k - 5)a_{n+1} - a_n + 4 - 2k, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tìm tất cả $k \in \mathbb{Z}$ sao cho a_n là số chính phương, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tài liệu tham khảo

1. Một số lớp các bài toán về tính chất số học của dãy số, Ngô Thị Hải
2. Tuyển tập các đề thi 30.4
3. Tuyển tập các đề thi quốc gia môn toán từ năm 2006 đến nay
4. Các trang Web: Mathscope.org

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.

CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN KHI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Nguyễn Ngọc Xuân, Bùi Thị Hương

Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ, Hoà Bình**1. Phương pháp thế trong giải hệ phương trình**

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau:

a.
$$\begin{cases} y(1+x^2) = x(1+y^2) \\ x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ xy + x + 1 = x^2 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2y = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

g.
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

h.
$$\begin{cases} xy - x + y = 3 \\ 4x^3 + 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 5 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

a.
$$\begin{cases} y(1+x^2) = x(1+y^2) & (1) \\ x^2 + 3y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1) ta có: $(1) \Leftrightarrow (x-y)(1-xy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases}$ nếu $x = y \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x = y = \pm \frac{1}{2}$.nếu $x = \frac{1}{y} \Rightarrow 3y^4 - y^2 + 1 = 0$ phương trình vô nghiệm.

b.
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y & (2) \end{cases}$$

Từ (1) rút được: $x^2 + 1 = y(4-x-y)$, thế vào (2) ta có:

$$y(4-x-y)(x+y-2) = y \Leftrightarrow y(x+y-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

nếu $y=0$ thay vào hệ có $x^2 = -1$ vô nghiệm.nếu $x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x$, thế vào (1) ta có: $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -2 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$

$$c. \begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y & (1) \\ x^2 - 3y^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

nhân vế với vế của (1) và (2) cho nhau ta có:

$$6(x^3 - y^3) = (x^2 - 3y^2)(8x + 2y) \Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2y - 24xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x + 4y)(x - 3y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4y \\ x = 3y \end{cases}$$

nếu $x=0$ thay vào (2) có $y^2 = -2$ vô nghiệm.

$$\text{nếu } x=-4y \text{ thay vào (2) có } y^2 = \frac{6}{13} \Rightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow x = 4\sqrt{\frac{6}{13}} \\ y = \sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow x = -4\sqrt{\frac{6}{13}} \end{cases}$$

$$\text{nếu } x=3y \text{ thay vào (2) có } y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = -1 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases} \quad \text{ĐK: } x+y \geq 0$$

Biến đổi (1) ta có

$$x^2 + y^2 + \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{x+y} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)\left(\frac{x^2+y^2}{x+y} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x+y=1.$$

$$\text{Thế } y=1-x \text{ vào (2) ta có } x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=-2 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

$$e. \begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 & (1) \\ xy + x + 1 = x^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) rút ra được $x(y+1) = (x-1)(x+1)$ thay vào (2) ta có

$$x(x-1)(x+1)(x+y+1) - (3x-1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)[x(x+1)(x+y+1) - (3x-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[x^2(x+1) + x(x+1)(y+1) - (3x-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[x^2(x+1) + (x-1)(x+1)^2 - (3x-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^3 + 2x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Trở Toán trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ - Tỉnh Hòa Bình

nếu $x=1$ thay vào (1) có $y=-1$.

nếu $x=0$ thay vào (1) có $0=1$ vô nghiệm.

nếu $x=-2$ thay vào (1) có $y=-\frac{5}{2}$.

$$\text{f. } \begin{cases} x^3 + 3x^2y = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$$

Biến đổi (1) ta có: $x(x^2 + 3y^2) = -49$, nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta có

$$y^2 = -\frac{49}{3x} - \frac{x^2}{3}, \text{ thay vào (2) ta có}$$

$$x^2 - 8xy - \frac{49}{3x} - \frac{x^2}{3} = 8y - 17x \Leftrightarrow 2x^3 + 51x^2 - 49 = 24x^2y + 24xy$$

$$\Leftrightarrow 24xy(1+x) = (x+1)(2x^2 + 49x - 49) \Leftrightarrow (x+1)[24xy - (2x^2 + 49x - 49)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = \pm 4 \\ y = \frac{2x^2 + 49x - 49}{24x} & (3) \end{cases}$$

$$\text{thay (3) vào (2) có } x^2 + 17x = 8 \frac{(1+x)(2x^2 + 49x - 49)}{24x} - \left(\frac{2x^2 + 49x - 49}{24x} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(4x^2 - 4x + 49) = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = \pm 4.$$

$$\text{g. } \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 & (1) \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) rút ra được } xy = \frac{-x^2 + 6x + 6}{2} \text{ thế vào (1) có phương trình: } x(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

$x=0$ thay vào (2) có $0=6$ vô nghiệm.

$$x=-4 \text{ thay vào (2) có } y = \frac{17}{4}.$$

$$\text{h. } \begin{cases} xy - x + y = 3 & (1) \\ 4x^3 + 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 5 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) rút ra được $y(x+1) = x+3$ thay vào (2) ta có:

$$y^3 + 4(x+1)^3 - 3(x+3) - 6y = 0 \Leftrightarrow y^3 + 4(x+1)^3 - 3y(x+1) - 6y = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 4(x+1)^3 - 3y(x+3) = 0 \Leftrightarrow y^3 + 4(x+1)^3 - 3y^2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+x+1)(y-2x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-1 \\ y = 2(x+1) \end{cases}$$

nếu $y = -x - 1$ thay vào (1) có $x^2 + 3x + 4 = 0$ vô nghiệm.

nếu $y = 2(x + 1)$ thay vào (1) có $2x^2 + 3x - 1 = 0$.

2. Phương pháp đặt ẩn phụ trong giải hệ phương trình

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$a. \begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2 y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} x^2 + y + x^3 y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

$$e. \begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x + y)^2} = \frac{85}{3} \\ 2x + \frac{1}{x + y} = \frac{13}{3} \end{cases}$$

Hướng dẫn:

a. ta có Biến đổi $3x + 2y - 1 = (2x + y + 1) + (x + y) - 2$, đặt $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} = u \geq 0 \\ \sqrt{x + y} = v \geq 0 \end{cases}$ và đưa về hệ

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases}$$

rút $u = v + 1$ thế vào phương trình còn lại được phương trình $2v^2 + 2v - 1 = 0$.

b. ĐK: $x \neq 0$. iến đổi về hệ $\begin{cases} (x + y) - \frac{3}{x} = -1 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} = -1 \end{cases}$, đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{1}{x} \end{cases}$ và đưa về hệ $\begin{cases} u - 3v = -1 \\ u^2 - 5v^2 = -1 \end{cases}$. Rút

$u = 3v - 1$ thế vào phương trình còn lại được $4v^2 - 6v + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 1 \Rightarrow u = 2 \\ v = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \end{cases}$ từ đó tìm được

$$(x; y) = \left(1; \frac{-1}{2}\right); \left(2; \frac{-3}{2}\right).$$

c. Thay $y = 0$ vào hệ có $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm, từ đó suy ra $y = 0$ không là nghiệm của hệ. iến đổi hệ về dạng

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{x}{y} = 13 \end{cases}, \text{ đặt } \frac{1}{y} = u \text{ và đưa về hệ } \begin{cases} x + u + xu = 7 \\ x^2 + u^2 + uv = 13 \end{cases} \text{ đây là hệ đối xứng với } u \text{ và } x. \text{ Giải}$$

hệ này ta tìm được $(x; u) = (3; 1); (1; 3) \Rightarrow (x; y) = (3; 1); \left(1; \frac{1}{3}\right)$.

$$d. \begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y) + xy + xy(x^2 + y) = -\frac{5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x^2 + y = u \\ xy = v \end{cases} \text{ đưa về hệ } \begin{cases} u + v + uv = -\frac{5}{4} \\ u^2 + v = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Rút $v = -\frac{5}{4} - u^2$ và thế vào phương trình còn lại ta tìm được

$$\frac{5}{4}u^3 + u^2 + \frac{5}{4}u = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow v = -\frac{5}{4} \Rightarrow (x; y) = \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; \sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right)$$

e. Biến đổi hệ về dạng

$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = \frac{85}{3} \\ 2x + \frac{1}{x+y} = \frac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \frac{3}{(x+y)^2} = \frac{85}{3} \\ x+y + x-y + \frac{1}{x+y} = \frac{13}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x+y + \frac{1}{x+y}\right)^2 + (x-y)^2 = \frac{67}{3} \\ x-y + \left(x+y + \frac{1}{x+y}\right) = \frac{13}{3} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } x-y = u, x+y + \frac{1}{x+y} = v \text{ đưa về hệ } \begin{cases} u^2 + 3v^2 = \frac{67}{3} \\ u + v = \frac{13}{3} \end{cases}$$

Rút $u = \frac{13}{3} - v$ và thế vào phương trình còn lại.

3. Phương pháp đánh giá trong giải hệ phương trình

Ví dụ 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a. } & \begin{cases} x = 2y^3 - 6y - 2 \\ y = -x^3 + 3x + 4 \end{cases} & \text{b. } & \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^3 + 3x^2 + 6y - 12x + 13 = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

$$\text{a. Biến đổi đưa về hệ } \begin{cases} y - 2 = (x + 1)^2 (2 - x) & (1) \\ x - 2 = 2(y + 1)^2 (y - 2) & (2) \end{cases}$$

nếu $x > 2$ từ (1) có $y < 2$ từ (2) có $x < 2$ (vô lí)

nếu $x < 2$ từ (1) có $y > 2$ từ (2) có $x > 2$ (vô lí)

Vậy $x = y = 2$.

$$\text{b. Ta có } \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} \geq 2 \\ \sqrt[3]{y^2 - 2y + 9} \geq 2 \end{cases} \text{ từ hệ Ban đầu } \Rightarrow \begin{cases} x + xy \geq x^2 + y \\ y + xy \geq y^2 + x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2xy. \text{ từ đó tìm được}$$

nghiệm $x = y = 1$ và $x = y = 0$.

$$\text{c. } \begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0 & (1) \\ 2x^3 + 3x^2 + 6y - 12x + 13 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) rút ra được } y^2 = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) có } 2x^3 + 3x^2 - 12x + 13 = -6y \leq 6 \Rightarrow (2x + 7)(x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = y = 1.$$

4. một số phương pháp khác trong giải hệ phương trình

a. Sử dụng tính chất nghiệm của phương trình Bậc hai

ví dụ 4. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a. } \begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \cdot \begin{cases} y^2 = (5x + 4)(4 - x) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

$$\text{a. } \begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1): $6x^2 + x(1 - 3y) + y - 1 = 0$ coi đây là phương trình ẩn x , y là tham số, tìm

$$\text{được: } \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y = 1; x = 0 \vee y = \frac{-3}{5}; x = \frac{-4}{5} \\ x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) & (1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

Coi (2) là phương trình ẩn y , x là tham số tìm được $\begin{cases} y = 5x+4 \\ y = 4-x \end{cases}$ sau đó thế vào (1).

B. Đưa về phương trình đẳng cấp

Ví dụ 5. giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a. } \begin{cases} 4x^4 + y^4 = 4x + y \\ x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

$$\text{a. } \begin{cases} 4x^4 + y^4 = 4x + y \\ x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \end{cases}$$

nhân chéo hai vế của hai phương trình trong hệ và đưa về phương trình đẳng cấp:

$$4x^4 + y^4 = (x^3 + y^3 - xy^2)(4x + y) \Leftrightarrow xy(x^2 - 4xy + 3y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x = y \Rightarrow x = y = 1 \\ x = 3y \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}; y = \frac{3}{\sqrt[3]{25}} \end{cases}$$

$$\text{b. Biến đổi đưa về hệ } \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ (x^2 - xy + y^2)^2 = 49 \end{cases}$$

nhân chéo hai phương trình trong hệ đưa về phương trình:

$$6x^4 - 26x^3y + 32x^2y^2 - 26xy^3 + 6y^4 = 0$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

GIẢI CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH SAU

$$1. \begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y+x-2) = y \end{cases}$$

G: dễ thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Với $y \neq 0$ đặt $\frac{x^2+1}{y} = a$; $y+x=b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a(b-2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a(2-a)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3-x=x^2+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=5 \end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình có 2 nghiệm (1;2) và (-2;5)

$$2. \quad \begin{cases} x^4 + 5y = 6 \\ x^2y^2 + 5x = 6 \end{cases}$$

G: Trừ vế với vế hai phương trình của hệ ta được:

$$(x-y)[x^2(x+y)-5]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y & (1) \\ x^2(x+y)-5=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x^4 + 5x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2+x+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = \frac{5-x^3}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^4 + 5 \cdot \frac{5-x^3}{x^2} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + \frac{25}{x^2} - 5x = 6$$

$$\text{Xét } x^4 + \frac{25}{x^2} = x^4 + \frac{25}{2x^2} + \frac{25}{2x^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{625}{4}}$$

$$\text{Mặt khác, từ (2)} \Leftrightarrow -5x \geq -6$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{25}{x^2} - 5x > 6$$

$\Rightarrow$ trường hợp này phương trình vô nghiệm

Kết luận: Hệ phương trình có 2 nghiệm (1;1) và (-2;-2)

$$3. \quad \begin{cases} \sqrt{3x+y} + \sqrt{5x+4y} = 5 \\ 12\sqrt{5x+4y} + x - 2y = 35 \end{cases}$$

$$G: \text{ĐK} \begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{y-1} = 27 - x^3 & (1) \\ (x-2)^4 + 1 = y & (2) \end{cases} \begin{cases} 3x + y \geq 0 \\ 5x + 4y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{3x+y} = a \geq 0 \quad ; \quad \sqrt{5x+4y} = b \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 12b+2a^2-b^2=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5-a \\ 12b+2a^2-(5-a)^2=35 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 12(5-a) - (25 - 10a + a^2) = 35$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a(a-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ b=3 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} 3x+y=0 \\ 5x+4y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-25}{7} \\ y=\frac{75}{7} \end{cases} \quad +) \begin{cases} 3x+y=4 \\ 5x+4y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình có 2 $\left(\frac{-25}{7}; \frac{75}{7}\right)$ nghiệm và (1;1)

$$4. \quad \begin{cases} \sqrt{4x+y} + \sqrt{2x+y} = 4 \\ \sqrt{2x+y} + x+y = -2 \end{cases}$$

$$G: \text{ĐK} \begin{cases} 4x+y \geq 0 \\ 2x+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{4x+y} = a \geq 0 \quad ; \quad \sqrt{2x+y} = b \geq 0$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ b+\frac{3b^2-a^2}{2}=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4-b \\ 2b+3b^2-a^2=-4 \end{cases} \quad (*) \quad \text{Có}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2b+3b^2-(16-8b+b^2)=-4 \Leftrightarrow 2b^2+10b-12=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=-6(L) \end{cases} \Leftrightarrow a=3 \quad \Rightarrow \begin{cases} 4x+y=9 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-7 \end{cases}$$

Kết luận Hệ phương trình có 1 nghiệm (4;-7)

$$5. \quad \begin{cases} 8(x^2+y^2) + 4xy + \frac{5}{(x+y)^2} = 13 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$$

G: ĐK $x + y \neq 0$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + y = a \neq 0 \\ x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8.(2a^2 - 2b^2) + 4.\frac{a^2 - b^2}{4} + \frac{5}{a^2} = 13 \\ a + b + \frac{1}{a} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 + 3b^2 + \frac{5}{a^2} = 13 \\ b = 1 - \left[a + \frac{1}{a} \right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5.\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 3\left[1 - \left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^2 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5.\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - 3.\left(a + \frac{1}{a}\right) - 10 = 0$$

$$\text{Đặt } a + \frac{1}{a} = t \text{ có } t^2 - a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$$

$$\Rightarrow 8t^2 - 6t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 = a + \frac{1}{a} \Rightarrow a = 4 \\ t = -\frac{5}{8} = a + \frac{1}{a} \text{ (vô } n_o) \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - 6 = 0 \\ (x + y - 1)^2 - \frac{4}{(x-y)^2} - 3 = 0 \end{cases}$$

G: Đặt $x + y = a$; $x - y = b \neq 0$ có

$$\begin{cases} ab = 6 \\ (a-1)^2 - \frac{4}{b^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{6}{a} \\ (a-1)^2 - \frac{a^2}{9} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a-3)(4a-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{-3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad +) \begin{cases} x + y = -\frac{3}{4} \\ x - y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-35}{8} \\ y = \frac{29}{8} \end{cases}$$

Kết luận Hệ phương trình có 2 nghiệm $\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{-35}{8}; \frac{29}{8}\right)$

7.
$$\begin{cases} 16x^2y^2 - 17y^2 = -1 \\ 4xy + 2x - 7y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x^2y^2 + 1 = 17y^2 \\ 4xy + 1 = 7y - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x^2y^2 + 1 = 17y^2 \\ 16x^2y^2 + 8xy + 1 = 49y^2 + 4x^2 - 28xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x^2y^2 - 17y^2 = -1 \\ 4xy + 2x - 7y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 32y^2 + 4x^2 + 2 - 28xy - 14y + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 16y^2 + 2x^2 + 1 - 14xy - 7y + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 26xy + 32y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 8y)(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8y & (1) \\ x = y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 32y^2 + 16y - 7y = -1$$

$$(2) \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (\text{vô nghiệm})$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(4x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Kết luận Hệ phương trình có 4 nghiệm $(1; 1); \left(1; \frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{4}; 1\right)$

$$8. \quad \begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y)=1 \\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=2^2+8 \end{cases}$$

$$G: \text{ĐK } -2 \leq x \leq \frac{22}{3}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y)=1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=y^2+8 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x^2+1-x^2)(\sqrt{y^2+1}+y)=\sqrt{x^2+1}-x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}+y=\sqrt{x^2+1}-x \quad (1')$$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}+x)(y^2+1-y^2)=\sqrt{y^2+1}-y$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}+x)=\sqrt{y^2+1}-y \quad (2')$$

$$(1')+(2') \Rightarrow \sqrt{y^2+1}+y+\sqrt{x^2+1}+x=\sqrt{x^2+1}-x+\sqrt{y^2+1}-y$$

$$\Leftrightarrow x=-y$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=y^2+8$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+2}-8+\sqrt{22-3x}-4=x^2-4$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{22-3x-16}{\sqrt{22-3x}+4} = (x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{4}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{3}{\sqrt{22-3x}+4} = x+2 \end{cases} \quad (*)$$

Nếu $x > -1$ thì $x+2 > 1$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2}+2 > 3 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x+2}+2} < \frac{4}{3}$$

$$22-3x < 25 \Rightarrow \sqrt{22-3x}+4 < 9$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{22-3x}+4} > \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{22-3x}+4} < -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow VT < 1 \Rightarrow$ Vô nghiệm

CMTT với $x < -1 \Rightarrow$ Vô nghiệm

Xét thấy PT (*) có nghiệm $x = -1$

Kết luận Hệ phương trình có 2 nghiệm (2;-2) và (-1;1)

$$9. \quad \begin{cases} x+y=2 \\ 4x^2+y^2=5(2x-y)\sqrt{xy} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{G: } & 4x^2 - 4xy + y^2 - 5(2x - y)\sqrt{xy} + 4xy = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2x - y)^2 - 5(2x - y)\sqrt{xy} + 4xy = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2x - y - \sqrt{xy})(2x - y - 4\sqrt{xy}) = 0 \\
 +) & \begin{cases} 2x - y = \sqrt{xy} \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4xy + y^2 = xy \\ y = 2 - x \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & 4x^2 - 5xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x(2 - x) + (2 - x)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 4x^2 - 10x + 5x^2 + 4 - 4x + x^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 10x^2 - 14x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \\
 +) & \begin{cases} 2x - y = \sqrt{xy} \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 = 16xy \Leftrightarrow 4x^2 - 20xy + y^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 4x^2 - 20x(2 - x) + (2 - x)^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 40x + 20x^2 + 4 - 4x + x^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 25x^2 - 44x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22 + 8\sqrt{6}}{25} \\ x = \frac{22 - 8\sqrt{6}}{25} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$10. \begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + xy - 22 = 0 \end{cases}$$

$$\text{G: } \begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ 2x^2y + 2x^2 + 4y - 44 = 0 \end{cases}$$

Cộng vế với vế ta có:

$$x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 + 2x^2y + 2x^2 + 4y - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y - 1)^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + y - 1 = \pm 6 \dots$$

$$\Leftrightarrow a = 19 - a^2(a^4 + 5a^2 + 12)$$

$$\Leftrightarrow a^6 + 5a^4 + 12a^2 + a - 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(a^5 + a^4 + 6a^3 + 6a^2 + 18a + 19) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2$$

Kết luận Hệ phương trình có 1 nghiệm (3;2)

$$11. \begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{y-1} = 27 - x^3 & (1) \\ (x-2)^4 + 1 = y & (2) \end{cases}$$

G: ĐK $x \geq 2, y \geq 1$

$$(2) \Rightarrow (x-2)^4 = y-1$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = \sqrt{y-1} \quad \text{Thế vào pt (1) ta được:}$$

$$\sqrt{x-2} - (x-2)^2 = 27 - x^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = -x^3 + x^2 - 4x + 31$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 19 + (2-x)(x^2 + x + 6)$$

Đặt $\sqrt{x-2} = a > 0$ ta có:

$$\Leftrightarrow a = 19 - a^2(a^4 + 5a^2 + 12)$$

$$\Leftrightarrow a^6 + 5a^4 + 12a^2 + a - 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(a^5 + a^4 + 6a^3 + 6a^2 + 18a + 19) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ a^5 + a^4 + 6a^3 + 6a^2 + 18a + 19 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=2$$

Kết luận Hệ phương trình có 1 nghiệm (3;2)

$$12. \quad \begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

Biến đổi phương trình thứ 2 của hệ ta được:

$$(x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x(y+1) + \frac{9(y+1)^2}{4} + 2y^2 + 2y - 4 - \frac{9(y+1)^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \frac{3(y+1)}{2} \right]^2 - \frac{y^2 + 10y + 25}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3y + 3)^2 - (y + 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x + y - 1)(x + 2y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ x + 2y = -4 & (2) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2}$$

$$2x + 2y + 2 + 2\sqrt{(2x+1)(2y+1)} = \frac{(x^2 + y^2 - 2xy)^2}{4} \quad (*)$$

$$\text{Từ (1)(*)} \Rightarrow 4 + 2\sqrt{4xy+3} = \frac{(1-4xy)^2}{4} = \frac{1-8xy+16x^2y^2}{4}$$

Đặt $4xy = a \geq -\frac{3}{4}$ ta có:

$$4 + 2\sqrt{a+3} = \frac{(1-a)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(a+3) = \left[\frac{(1-a)^2}{4} - 4 \right]^2 = \frac{(1-a)^4}{16} - 2(1-a)^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 4a + 12 = \frac{1 - 4a + 6a^2 - 4a^3 + a^4}{16} - 2 + 4a - 2a^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 4a^3 - 26a^2 - 4a + 33 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(a+3)(a^2 - 6a - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \\ a = 3 + 2\sqrt{5} \\ a = 3 - 2\sqrt{5} \end{cases} \quad (L)$$

Với

$$\begin{cases} 4xy = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 4(1 - y)y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -4y^2 + 4y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Với $4xy = 3 + 2\sqrt{5} \Rightarrow 4(1 - y)y = 3 + 2\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow -4y^2 + 4y - (3 + 2\sqrt{5}) = 0 \quad (VNo)$$

Kết luận Hệ phương trình có 1 nghiệm $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$$13. \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3y} + \sqrt{y^2 + 8x} = 5 \\ x^2 + y^2 + 8x + 3y = 13 \end{cases}$$

G: Đặt $\sqrt{x^2 + 3y} = a > 0$; $\sqrt{y^2 + 8x} = b > 0$ có

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a^2+b^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ 25-10b+2b^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow (b-2)(b-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=2 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} x^2+3x=9 \\ y^2+8x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{9-x^2}{3} \\ (9-x^2)^2+72x-36=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x^2+9)^2-36x^2+72x-36=0 \Leftrightarrow (x^2+9)^2-36(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+6x+3)(x^2-6x+15)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+3=0 \\ x^2-6x+15=0(VN_o) \end{cases} \Leftrightarrow x=-3 \pm \sqrt{6}$$

$$+) \begin{cases} x^2+3x=4 \\ y^2+8x=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{4-x^2}{3} \\ 16-8x^2+x^4+72x=81 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^4-8x^2+72x-65=0 \Leftrightarrow x^4+5x^3-5x^3-25x^2+17x^2+85x-137x-65=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+5)-5x(x+5)+17x(x+5)-13(x+5)=0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1)(x^2-4x+13)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \sqrt{x^2-1}-y(1+\sqrt{2x-1})=-8 \\ y^2+y\sqrt{2x-1}+2x=13 \end{cases}$$

$$G: \text{ĐK } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2x-1}=a > 0 \text{ có } 2x=a^2+1$$

$$\begin{cases} a-y(1+a)=-8 \\ y^2+ya+a^2-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-y-ay=-8 \\ y^2+ya+a^2=12 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } a-y=t \text{ ta có } ay=v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-v=-8 \\ t^2+3v=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=t+8 \\ t^2+3t+24=12 \end{cases} \quad (VN_o)$$

$$15. \begin{cases} \sqrt{3x+1}-\sqrt{x^2+y}+x-y=2 \\ x^3+2x^2+(y-1)x+y=2 \end{cases}$$

$$G: x^3 + 2x^2 + yx - x + y - 2 = 0$$

$$\text{Đk: } -\frac{1}{3} \leq x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + yx + y + x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) + y(x+1) + (x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + y + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (L)} \\ x^2 + y + x - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x - x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{x^2 + y} + x - y = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{x^2 + 2 - x - x^2} + x - 2 + x + x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 4 - 2x - x^2$$

$$+ \text{ Nếu } x \geq 1 \text{ thì } \sqrt{3x+1} \geq 2 \text{ và } \sqrt{2-x} \leq 1 \Rightarrow VT \geq 3$$

$$\Rightarrow 4 - 2x - x^2 = -x(x-1) - x + 4$$

$$\text{Có } \begin{cases} x(1-x) \leq 0 \\ 4-x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow VT \leq 3$$

$$\Rightarrow VT = VP \Leftrightarrow x = 1$$

Giáo viên Toán. Trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.

SỬ DỤNG DÃY SỐ TRONG MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP $\mathbb{Z}$

TRẦN NGỌC THẮNG
GV THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC

Phương trình hàm là một chuyên đề quan trọng trong chương trình chuyên toán trong các trường THPT chuyên. Các bài toán liên quan đến phương trình hàm cũng là những bài tập thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, khu vực và quốc tế. Khi giải các bài tập về phương trình hàm thông thường chúng ta phải dự đoán được các tính chất cơ bản của hàm số cần tìm để từ đó đề ra phương hướng giải quyết, các hướng giải quyết thường là không tự nhiên và có nhiều kĩ thuật khó. Do đó việc giảng dạy chuyên đề phương trình hàm cho học sinh giỏi thường gặp rất nhiều khó khăn. Khó khăn ở đây theo chúng tôi thứ nhất là việc chọn lọc tài liệu, nội dung kiến thức, mức độ kiến thức và thời gian giảng dạy cho học sinh như thế nào là thích hợp? Thứ hai là việc tiếp thu của học sinh, cách học phần này cũng như thời gian học phần này không nhiều. Đối với chuyên đề phương trình hàm để học sinh học tốt, cũng như phát huy được năng lực của bản thân giáo viên cần trang bị cho các em các phương pháp giải cơ bản nhất và thường xuyên cập nhật các dạng toán mới. Với chuyên đề "sử dụng dãy số trong một số dạng bài tập về phương trình hàm trên tập $\mathbb{Z}$ " chúng tôi mong muốn được góp một phần nhỏ vào việc giảng dạy phần phương trình hàm đạt kết quả tốt nhất. Chuyên đề này được chia ra làm hai phần chính

Phần A: Trình bày một số kiến thức cơ bản về dãy số được sử dụng trong bài viết

Phần B: Phần bài tập, phần này được chia làm 2 dạng toán hay gặp (phương trình hàm Cauchy, phương pháp sử dụng dãy lặp) mà cách giải thường sử dụng dãy số.

A. PHẦN LÝ THUYẾT

1. Giới hạn của dãy số

1.1. Định nghĩa. Cho dãy số thực $(u_n)_{n \geq 1}$. Số a được gọi là giới hạn của dãy $(u_n)_{n \geq 1}$ nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại một số tự nhiên N (phụ thuộc vào ε) sao cho $|u_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N$. Khi đó ta kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hoặc $\lim u_n = a$. Một dãy số có giới hạn còn được gọi là **hội tụ**.

1.2. Các tính chất của dãy hội tụ.

1.2.1. Mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất

1.2.2. Mọi dãy con của dãy hội tụ là một dãy hội tụ

1.2.3. Mọi dãy hội tụ là dãy bị chặn

1.2.4. Cho hai dãy hội tụ $(u_n)_{n \geq 1}$ và $(v_n)_{n \geq 1}$. Giả sử tồn tại số tự nhiên N sao cho $u_n \geq v_n, \forall n \geq N$. Khi đó $\lim u_n \geq \lim v_n$

1.2.5. Nguyên lý kẹp. Giả sử các dãy $(u_n)_{n \geq 1}, (v_n)_{n \geq 1}, (w_n)_{n \geq 1}$ thỏa mãn các bất đẳng thức $u_n \leq v_n \leq w_n$ với mọi n , đồng thời $\lim u_n = \lim w_n = a$. Khi đó $\lim v_n = a$.

1.2.6. Dãy số $(u_n)_{n \geq 1}$ được gọi là một dãy cơ bản hay dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại một số tự nhiên N (phụ thuộc vào ε) sao cho $|u_m - u_n| < \varepsilon, \forall m, n \geq N$.

Dãy số thực $(u_n)_{n \geq 1}$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy cơ bản.

1.2.7. Một dãy tăng (tăng thực sự) và bị chặn trên thì hội tụ. Một dãy giảm (giảm thực sự) và bị chặn dưới thì hội tụ.

2. Cận trên, cận dưới

2.1. Định nghĩa. Cho tập $A \subset \mathbb{R}$.

2.1.1. Số a được gọi là một cận trên của tập A nếu $x \leq a, \forall x \in A$. Cận trên nhỏ nhất (nếu có) của tập hợp A được gọi là cận trên đúng của A và kí hiệu là $\sup A$.

2.1.2. Số a được gọi là một cận dưới của tập A nếu $x \geq a, \forall x \in A$. Cận dưới lớn nhất (nếu có) của tập hợp A được gọi là cận dưới đúng của A và kí hiệu là $\inf A$.

2.2. Tính chất

2.2.1. Mọi tập khác rỗng và bị chặn đều tồn tại cận trên đúng và cận dưới đúng.

2.2.2. Nếu tập A có cận trên đúng thì tồn tại một dãy $(u_n)_{n \geq 1}$ trong A sao cho $\lim u_n = \sup A$. Nếu tập A có cận dưới đúng thì tồn tại một dãy $(u_n)_{n \geq 1}$ trong A sao cho $\lim u_n = \inf A$.

3. Tập trù mật

3.1. Định nghĩa. Cho hai tập $A, B \subset \mathbb{R}$. Tập hợp A được gọi là trù mật trong tập hợp B nếu với mọi $x, y \in B, x < y$ đều tồn tại $a \in A$ sao cho $x < a < y$.

3.2. Tập hợp $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra với mỗi $x \in \mathbb{R}$ luôn tồn tại một dãy hữu tỷ (x_n) hội tụ về x .

3.3. Tập hợp $\left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra với mỗi $x \in \mathbb{R}$

luôn tồn tại một dãy hữu tỷ $\left(\frac{m}{2^n} \right)$ hội tụ về x .

4. Hàm số bị chặn, hàm số đơn điệu

4.1. Hàm số f xác định trên tập D được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $f(x) \leq M, \forall x \in D$.

4.2. Hàm số f xác định trên tập D được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $f(x) \geq m, \forall x \in D$.

4.3. Hàm số f xác định trên tập D được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên và bị chặn dưới.

4.4. Hàm số f xác định trên tập D được gọi là tăng (tăng ngặt) trên D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$)

4.5. Hàm số f xác định trên tập D được gọi là giảm (giảm ngặt) trên D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)

4.6. Hàm số tăng hoặc giảm được gọi chung là hàm đơn điệu.

5. Hàm số liên tục

5.1. Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

5.2. Định lý giá trị trung gian của hàm số liên tục

5.2.1. Định lý. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = M$.

5.2.2. Hệ quả. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$. Từ đó ta có nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.

5.2.3. Định lý. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Từ định lý này suy ra nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì nó bị chặn trên đoạn đó.

5.2.4. Định lý. Nếu một hàm số liên tục và đơn ánh trên khoảng $(a; b)$ thì nó đơn điệu nghiêm ngặt trên khoảng đó.

Chứng minh.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử hàm số f không đơn điệu nghiêm ngặt khi đó tồn tại $a < x < y < z < b$ sao cho $f(x) < f(y) > f(z)$ hoặc $f(x) > f(y) < f(z)$.

+) Nếu $f(x) < f(y) > f(z)$ thì theo định lí giá trị trung gian ta có với mỗi $\max\{f(x), f(z)\} < M < f(y)$ tồn tại $x < c < y < d < z$ sao cho $M = f(c) = f(d) \Rightarrow c = d$ vô lý. Vậy trường hợp này không xảy ra.

+) Nếu $f(x) > f(y) < f(z)$ chứng minh tương tự ta suy ra mâu thuẫn. Vậy định lí được chứng minh.

B. PHẦN BÀI TẬP

I. PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY

Cho hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$. Khi đó phương trình

$$f(x+y) = f(x) + f(y); \forall x, y \in \mathbb{I}$$

được gọi là phương trình hàm Cauchy, dễ thấy hàm số f thỏa mãn phương trình hàm Cauchy có những tính chất cơ bản:

(1) $f(0) = 0$ và f là hàm số lẻ trên $\mathbb{I}$;

(2) $f(n) = nf(1), \forall n \in \mathbb{Z}$;

(3) $f(r) = rf(1), \forall r \in \mathbb{Q}$.

Cùng với các tính chất cơ bản trên và thêm điều kiện của hàm số f hoặc điều kiện về tập xác định của f ta sẽ chỉ ra được $f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{I}$. Sau đây với bài tập 1 chúng tôi nêu lại một số các điều kiện để nghiệm của phương trình hàm Cauchy có dạng $f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{I}$.

Bài 1. Giả sử $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ là một hàm số thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) + f(y); \forall x, y \in \mathbb{I}.$$

Khi đó nếu hàm số f thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

- (1) f là hàm đơn điệu trên $\mathbb{I}$
- (2) f là hàm liên tục trên $\mathbb{I}$
- (3) f là hàm liên tục tại một điểm trên $\mathbb{I}$
- (4) f không âm với mọi $x \geq 0$
- (5) f bị chặn trong một lân cận của 0
- (6) f bị chặn trên một đoạn hữu hạn
- (7) f có đạo hàm tại một điểm trên $\mathbb{I}$
- (8) $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{I}$
- (9) f bị chặn trên trên một đoạn hữu hạn
- (10) f bị chặn dưới trên một đoạn hữu hạn

(11) f bị chặn trên một đoạn hữu hạn.

Thì $f(x) = ax$, trong đó a là hằng số cho trước tùy ý.

Đây là các kết quả cơ bản về phương trình hàm Cauchy đã có trong nhiều tài liệu nên chúng tôi không nêu lại các chứng minh.

Bài 2. Nếu $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ là một hàm liên tục và với mọi $x, y \in \mathbb{I}$,

(1) $f(x+y) = f(x).f(y)$. Khi đó $f(x) = c^x$

(2) $f(xy) = f(x) + f(y)$. Khi đó $f(x) = c \ln x$

(3) $f(xy) = f(x).f(y)$. Khi đó $f(x) = x^c$

(4) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Khi đó $f(x) = ax + b$

Lời giải.

(1) Ta có $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{I}$. Nếu tồn tại $c \in \mathbb{I}$ sao cho

$f(c) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x-c+c) = f(x-c)f(c) = 0, \forall x \in \mathbb{I}$. Nếu $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{I}$ thì ta đặt $g(x) = \ln(f(x)) \Rightarrow g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{I}$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{I}$; do đó theo phương trình Cauchy ta được

$$g(x) = ax \Rightarrow f(x) = e^{ax} = c^x, \forall x \in \mathbb{I}.$$

(2), (3), (4) tương tự như phần (1).

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x)f(y), (1)$$

với mọi $x > 0, y > 0$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = \ln(f(\sqrt{x}))$, $x > 0$. Khi đó từ (1) ta được

$$\ln\left(f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)), \forall x, y > 0$$

$$\Leftrightarrow g(x^2 + y^2) = g(x^2) + g(y^2), \forall x, y > 0$$

Do đó theo bài tập 1 ta có $g(x) = cx, \forall x > 0$, trong đó c là hằng số dương suy ra $f(x) = a^{x^2}, \forall x > 0$, trong đó a là hằng số dương.

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, liên tục trên $\mathbb{I}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) + f(x+y) = f(xy+x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{I}. \quad (1)$$

Lời giải

Thay $y=1$ vào (1) ta được:

$$f(x) + f(x+1) = f(2x) + f(1), \forall x \in \mathbb{I} \quad (2)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(x+1) - f(2x) = f(1)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(x+1) - f(2x) = f(1) = f(x+1) + f(x+2) - f(2x+2) \Rightarrow \\ f(2x+2) - f(2x) = f(x+2) - f(x), \forall x \in \mathbb{I}.$$

Do đó ta thu được:

$$f(x+2) - f(x) = f\left(\frac{x}{2} + 2\right) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{2^k} + 2\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right), \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow f(x+2) - f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{x}{2^k} + 2\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) = f(2) - f(0). \text{ Từ đó suy ra}$$

$$f(x+2) - f(x) = f(2) - f(0), \forall x \in \mathbb{I} \quad (3)$$

Với n là số nguyên dương và đẳng thức (3) ta thu được:

$$f(x+2n) - f(x+2n-2) = f(2) - f(0)$$

$$f(x+2n-2) - f(x+2n-4) = f(2) - f(0)$$

.....

$$f(x+2) - f(x) = f(2) - f(0)$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được:

$$f(x+2n) = n(f(2) - f(0)) + f(x), \forall n \geq 1, x \in \mathbb{I} \quad (4)$$

Tương tự ta có:

$$f(x+2n+1) = n(f(2) - f(0)) + f(x+1), \forall n \geq 1, x \in \mathbb{I} \quad (5)$$

Thay $y = 2n$ vào (1) và kết hợp với đẳng thức (4) ta được:

$$f((2n+1)x) + f(2n) = f(2nx) + f(x+2n) \Leftrightarrow f((2n+1)x) - f(2nx) = f(x+2n) - f(2n)$$

$$\Rightarrow f((2n+1)x) - f(2nx) = n(f(2) - f(0)) + f(x+1) - n(f(2) - f(0)) - f(1)$$

$$\Rightarrow f((2n+1)x) - f(2nx) = f(x) - f(0) \quad (6)$$

Tương tự ta có đẳng thức:

$$f(2nx) - f((2n-1)x) = f(x+1) - f(1) \quad (7)$$

Từ các đẳng thức (6) và (7) ta có:

$$f(2nx) - f((2n-1)x) = f(x+1) - f(1)$$

$$f((2n-1)x) - f((2n-2)x) = f(x) - f(0)$$

.....

$$f(2x) - f(x) = f(x+1) - f(1)$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được:

$f(2nx) - f(x) = n(f(x+1) - f(1)) + (n-1)(f(x) - f(0))$
 $\Rightarrow f(2nx) = n(f(x) + f(x+1) - f(1)) - (n-1)f(0)$. Kết hợp với đẳng thức (2) ta được:

$$f(2nx) = nf(2x) - (n-1)f(0), \forall x \in \mathbb{I} \Rightarrow f(nx) = nf(x) - (n-1)f(0), \forall x \in \mathbb{I} \quad (8)$$

Trong (8) thay $n=2, x=1$ ta được:

$$f(2) = 2f(1) - f(0) \Leftrightarrow 2(f(1) - f(0)) = f(2) - f(0) = f(0) - f(-1) \Rightarrow f(-1) = 2f(0) - f(1)$$

Đặt $a = f(1) - f(0); b = f(0)$. Khi đó với mỗi số nguyên dương n và từ đẳng thức (8) ta được:

$$f(n) = nf(1) - (n-1)f(0) = an + b$$

$$f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) - (n-1)f(0) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = a \frac{1}{n} + b$$

$$f\left(n \cdot \frac{-1}{n}\right) = nf\left(-\frac{1}{n}\right) - (n-1)f(0) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{n}\right) = -a \frac{1}{n} + b$$

Với mỗi số hữu tỷ $r \in \mathbb{Q}$ luôn biểu diễn dưới dạng $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{N}^*$ nên theo đẳng thức (8) và các đẳng trên ta được:

$$f(r) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) - (n-1)f(0) = \frac{m}{n}a + b = ar + b$$

$$\Rightarrow f(r) = ar + b \quad (9)$$

Với mỗi $x \in \mathbb{I}$, tồn tại dãy số hữu tỷ $\{x_n\}$ hội tụ đến x nên từ đẳng thức (9) và tính liên tục của f suy ra $f(x) = ax + b$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$\{f(x+y)\} = \{f(x) + f(y)\}, \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{I}$$

(trong đó $[t]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá t và $\{t\} = t - [t]$)

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, $\{u_n\}$ là dãy số nguyên thì tồn tại số nguyên dương m sao cho $u_n = a, \forall n \geq m$.

Thật vậy, theo định nghĩa giới hạn thì tồn tại số nguyên dương m sao cho

$$|u_n - a| < \frac{1}{2}, \forall n \geq m \Rightarrow a - \frac{1}{2} < u_n < a + \frac{1}{2}, \forall n \geq m \Rightarrow u_n = a, \forall n \geq m$$

Do đó bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, từ giả thiết ta có

$$\{f(x+y)\} = \{f(x) + f(y)\}, \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{I}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) - [f(x+y)] = f(x) + f(y) - [f(x) + f(y)], \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{I}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) - f(x) - f(y) = [f(x+y)] - [f(x) + f(y)], \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{I}$$

Suy ra $f(x+y) - f(x) - f(y) \in \mathbb{C}$, với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ (1)

và sử dụng tính liên tục của hàm số ta được:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) - f(0) \right) = -f(0)$$

Kết hợp với bổ đề trên tồn tại số nguyên dương k sao cho:

$$f\left(x + \frac{1}{m}\right) - f(x) - f\left(\frac{1}{m}\right) = -f(0), \quad \forall m \geq k, \forall x \in \mathbb{I}$$

$$\Rightarrow f(x+1) = f(x) + mf\left(\frac{1}{m}\right) - mf(0), \quad \forall m \geq k, \forall x \in \mathbb{I}$$

$$\Rightarrow mf\left(\frac{1}{m}\right) - mf(0) = a \quad \forall m \geq k, \text{ trong đó } a = f(1) - f(0) \quad (2)$$

$$\text{Dễ dàng chứng minh được } f\left(x + \frac{m}{n}\right) = f(x) + \frac{m}{n}a, \quad \forall n \geq k \quad (3)$$

Với mỗi $x \in \mathbb{I}$, $\forall y \in \mathbb{I}$, tồn tại dãy $\left\{\frac{m_p}{n_p}\right\}$ hội tụ đến x với mọi $n_p \geq k$

Khi đó, kết hợp với (3) ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) - f(x) - f(y) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(f\left(y + \frac{m_p}{n_p}\right) - f\left(\frac{m_p}{n_p}\right) - f(y) \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(f(y) + a \frac{m_p}{n_p} - f(0) - a \frac{m_p}{n_p} - f(y) \right) = -f(0). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = -f(0), \quad \forall x, y \in \mathbb{I}$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$ ta được g là hàm số liên tục trên $\mathbb{I}$ và thỏa mãn đẳng thức

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{I}$$

Do đó theo bài toán 1 ta được $g(x) = cx, \forall x \in \mathbb{I} \Rightarrow f(x) = cx + f(0), \forall x \in \mathbb{I}$

Vậy $f(x) = cx + b$, trong đó c, b là các hằng số và $b \in \mathbb{C}$.

Bài 6 (Moldova 2009). Tìm tất cả các hàm $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y-z) + f(2\sqrt{xz}) + f(2\sqrt{yz}) = f(x+y+z), \quad (1)$$

với mọi $x, y, z \in [0; +\infty)$, sao cho $x+y \geq z$.

Lời giải. Thay $x=y=z=0$ vào (1) ta được $f(0)=0$.

Thay $x=0$ vào (1) ta được

$$f(y-z) + f(2\sqrt{yz}) = f(y+z), \quad \text{với mọi } y \geq z \geq 0 \quad (2)$$

Đặt $g(x) = f(\sqrt{x})$, kết hợp với (2) ta được:

$$g((y-z)^2) + g((2\sqrt{yz})^2) = f(y-z) + f(2\sqrt{yz}) = f(y+z) = g((y+z)^2),$$

với mọi $y \geq z \geq 0$.

Suy ra

$$g((y-z)^2) + g((2\sqrt{yz})^2) = g((y+z)^2),$$

với mọi $y \geq z \geq 0$. (3)

Với mọi $a, b \geq 0$ ta chọn $y = \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{2}$, $z = \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}}{2}$ suy ra

$$(y-z)^2 = a, (2\sqrt{yz})^2 = b,$$

Kết hợp với (3) ta được:

$$g(a+b) = g(a) + g(b), \forall a, b \geq 0$$

Do đó theo bài tập 1 ta được $g(x) = cx, \forall x \geq 0$, trong đó c là hằng số không âm suy ra $f(x) = cx^2$. Vậy $f(x) = cx^2$, trong đó c là hằng số không âm.

Bài 7 (IMO 2002). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \quad (1)$$

với mọi $x, y, z, t \in \mathbb{I}$.

Lời giải. Thay $x = y = z = 0$ vào (1) ta được

$$2f(0)(f(0) + f(t)) = 2f(0), \forall t \in \mathbb{I} \quad (2)$$

Trong (2) ta thay $t = 0$ ta được

$$4(f(0))^2 = 2f(0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

TH1. Nếu $f(0) = \frac{1}{2}$ thì theo (2) ta được

$$f(t) = \frac{1}{2}, \forall t \in \mathbb{I}$$

TH2. Nếu $f(0) = 0$, thay $z = t = 0$ ta được

$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{I} \quad (3)$$

Thay $x = y = 1$ vào (3) ta được

$$f(1) = (f(1))^2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

+) Nếu $f(1) = 0$ thì từ (3) thay $y = 1$ ta được $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{I}$

+) Nếu $f(1) = 1$ thì thay $y = t = 1$ vào (1) ta được

$$2(f(x) + f(z)) = f(x-z) + f(x+z), \forall x, z \in \mathbb{I} \quad (4)$$

Thay $x=0$ vào (4) ta được

$$2f(z) = f(z) + f(-z), \forall z \in \mathbb{I} \Rightarrow f(-z) = f(z), \forall z \in \mathbb{I}$$

Do đó f là hàm chẵn nên ta chỉ cần xét f trên $[0; +\infty)$ và kết hợp với (3) ta được $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ (5).

Thay $t=x, z=y$ vào (1) ta được

$$f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2, \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{I} \quad (6)$$

$$\text{Đặt } g(x) = \sqrt{f(x)}, x \geq 0 \Rightarrow g(x^2) = (g(x))^2, \forall x \geq 0 \quad (7)$$

Từ (4) và (6) ta được

$$\begin{aligned} 4(f(x) + f(z))^2 &= (f(x+z) + f(x-z))^2 = f((x+z)^2 + (x-z)^2) = f(2x^2 + 2z^2) \\ \Rightarrow 2g^2(x) + 2g^2(z) &= g(2x^2 + 2z^2), \forall x, z \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Thay $z=0$ vào (8) ta được

$$2g^2(x) = g(2x^2), \forall x \geq 0 \quad (9)$$

Từ (7), (8) và (9) ta có:

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \geq 0$$

Theo bài tập 1 ta có $g(x) = cx, \forall x \geq 0$, trong đó c là hằng số không âm $\Rightarrow f(x) = c^2 x^2$, kết hợp với $f(1) = 1 \Rightarrow c = 1$. Do đó $f(x) = x^2, \forall x \geq 0$, kết hợp với f là hàm số chẵn nên $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{I}$.

Vậy các hàm số thỏa mãn bài toán là:

$$f(x) = 0, f(x) = \frac{1}{2}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{I}$$

Bài tập tương tự

Bài 8 (IMO 1992). Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập hợp các số thực và nhận giá trị thực, sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ ta có

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

Bài 9. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập hợp các số thực và nhận giá trị thực, sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ ta có

$$f(x^n + f(y)) = y + (f(x))^n,$$

trong đó n là số nguyên dương cho trước.

Bài 10. Cho $n \geq 2$ là một số tự nhiên. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y^n) = x + (f(y))^n, \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{I}$$

Bài 11 (Romania 1998) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{I}$$

Bài 12. Tìm tất cả các hàm số $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y^2) = (f(x))^2 + (f(y))^2, \text{ với mọi } x, y \geq 0$$

Bài 13. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và

$$f\left(\frac{x^2 + y^2}{2xy}\right) = \frac{(f(x))^2 + (f(y))^2}{2f(x)f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{I}, x \neq 0, y \neq 0.$$

Bài 14. Tìm tất cả các hàm số $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x + y), \text{ với mọi } x, y \in [0; +\infty)$$

Bài 15. Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{I}$$

Bài 16. Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in (0; +\infty)$$

Bài 17. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{I} \rightarrow [0; +\infty)$ sao cho

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y),$$

với mọi số thực x, y .

Bài 18. Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + f(0),$$

với mọi số thực x, y .

Bài 19. Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n,$$

với mọi số thực x, y và n là một số nguyên dương.

Bài 20. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ sao cho tồn tại hàm số đơn điệu $h: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn

$$h(x + y) = h(x)f(y) + h(y),$$

với mọi số thực x, y .

Bài 21. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

(1) f liên tục tại 0;

(2) $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y)$, với mọi số thực x, y .

Bài 22. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

(1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi số thực x, y ;

(2) $f(p(x)) = p(f(x))$ với mọi đa thức $p(x) \in \mathbb{I}[x]$ có bậc lớn hơn 1.

Bài 23. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x) + yz) = x + f(y)f(z),$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{I}$.

Bài 24. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f((f(x))^2 + y) = x^2 + f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{I}$.

Bài 25. Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y, \forall x, y \in (0; +\infty)$$

Bài 26 (Bulgaria 2004) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$(f(x) - f(y))f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = f(x) + f(y),$$

với mọi số thực $x \neq y$.

Bài 27 (India 2003) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy),$$

với mọi số thực x, y .

Bài 28. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(y + zf(x)) = f(y) + xf(z),$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{I}$

Bài 29. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(z) + y) = zf(x) + y,$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{I}$.

Bài 30. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xyz) = f(x) + f(y) + f(z),$$

với mọi $xyz, x, y, z \in (a; b)$, trong đó $1 < a^3 < b$.

Bài 31. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = xf(y) + yf(x),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{I}$.

Bài 32 (Russia 1993). Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x^y) = (f(x))^{f(y)}, \forall x, y \in (0; +\infty)$$

Bài 33. Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ bị chặn trên một khoảng nào đó và thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y)) = yf(x),$$

với mọi số thực dương x, y .

Bài 34. Tìm tất cả các hàm số $f : (-1; +\infty) \rightarrow (-1; +\infty)$ bị chặn trên một khoảng nào đó và thỏa mãn điều kiện

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x),$$

với mọi $x, y \in (-1; +\infty)$.

Bài 35 (Bulgaria 2003). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + y + f(y)) = 2y + (f(x))^2,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

II. CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG DÃY LẬP

Cho hàm số $f : D \rightarrow D$. Khi đó dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = f\left(f\left(\dots f\left(\underset{n}{f(x)}\right)\right)\right)$ gọi là dãy lặp ứng với hàm số f . Sau đây chúng ta xét một số bài tập về phương trình hàm sử dụng dãy lặp.

Bài 1. Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)) = 6x - f(x), \quad \forall x \in (0; +\infty)$$

Lời giải.

Với mỗi $x > 0$ ta đặt $u_n = f\left(f\left(\dots f\left(\underset{n}{f(x)}\right)\right)\right)$. Khi đó ta có $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}, \forall n \geq 0$,

xét phương trình đặc trưng của dãy: $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$

Suy ra $u_n = c_1 2^n + c_2 (-3)^n$, trong đó c_1, c_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = u_0 = x \\ 2c_1 - 3c_2 = u_1 = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3x + f(x)}{5} \\ c_2 = \frac{2x - f(x)}{5} \end{cases}$$

Do đó $u_n = \frac{3x + f(x)}{5} 2^n + \frac{2x - f(x)}{5} (-3)^n, n \geq 0$

+) Nếu $f(x) > 2x \Leftrightarrow 2x - f(x) < 0$ thì xét với n chẵn ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ vô lí

+) Nếu $f(x) < 2x \Leftrightarrow 2x - f(x) > 0$ thì xét với n lẻ ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ vô lí.

Suy ra với mỗi $x > 0$ thì $f(x) = 2x$. Vậy $f(x) = 2x, \forall x > 0$.

Bài 2. Tìm tất cả các hàm số $f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x) - x) = 2x, \forall x \in [0; +\infty)$$

Lời giải.

Từ tập xác định của $f \Rightarrow f(x) \geq x, \forall x \geq 0$. Đặt $g(x) = f(x) - x$, kết hợp với phương trình hàm đã cho ta được:

$$g(g(x)) = f(g(x)) - g(x) = f(f(x) - x) - (f(x) - x) = 3x - f(x) = 2x - g(x)$$

Do đó ta cần tìm hàm số g được xác định như sau:

$$g: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty) \text{ thỏa mãn điều kiện } g(g(x)) + g(x) = 2x, \forall x \geq 0.$$

$$\text{Với mỗi } x > 0 \text{ ta đặt } u_n = f\left(\underbrace{f\left(f\left(\dots f\left(f(x)\right)\right)\right)}_n\right).$$

Khi đó ta có $u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0, \forall n \geq 0$, xét phương trình đặc trưng của dãy:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Suy ra $u_n = c_1 1^n + c_2 (-2)^n$, trong đó c_1, c_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = u_0 = x \\ c_1 - 2c_2 = u_1 = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{2x + f(x)}{3} \\ c_2 = \frac{x - f(x)}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } u_n = \frac{2x + f(x)}{3} 1^n + \frac{x - f(x)}{3} (-2)^n, n \geq 0$$

+) Nếu $f(x) > x \Leftrightarrow x - f(x) < 0$ thì xét với n chẵn ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ vô lí

+) Nếu $f(x) < x \Leftrightarrow x - f(x) > 0$ thì xét với n lẻ ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ vô lí.

Suy ra với mỗi $x > 0$ thì $f(x) = x$. Vậy $f(x) = x, \forall x > 0$.

Bài 3 (IMO Shortlist 1992). Tìm tất cả các hàm số $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x, \forall x \geq 0,$$

trong đó a, b là các số thực dương cho trước.

Lời giải.

$$\text{Với mỗi } x > 0 \text{ ta đặt } u_n = f\left(\underbrace{f\left(f\left(\dots f\left(f(x)\right)\right)\right)}_n\right).$$

Khi đó ta có $u_{n+2} + au_{n+1} - b(a+b)u_n = 0, \forall n \geq 0$, xét phương trình đặc trưng của dãy:

$$t^2 + at - b(a+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = b \\ t = -(a+b) \end{cases}$$

Suy ra $u_n = c_1 b^n + c_2 (-a-b)^n$, trong đó c_1, c_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = u_0 = x \\ bc_1 - (a+b)c_2 = u_1 = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{(a+b)x + f(x)}{a+2b} \\ c_2 = \frac{bx - f(x)}{a+2b} \end{cases}$$

Do đó $u_n = \frac{(a+b)x + f(x)}{3} b^n + \frac{bx - f(x)}{3} (-a-b)^n, n \geq 0$

+) Nếu $f(x) > bx \Leftrightarrow bx - f(x) < 0$ thì xét với n chẵn ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ vô lí

+) Nếu $f(x) < bx \Leftrightarrow x - f(x) > 0$ thì xét với n lẻ ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ vô lí.

Suy ra với mỗi $x > 0$ thì $f(x) = bx$. Vậy $f(x) = bx, \forall x > 0$.

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)) = f(x) + 2x, \forall x \in \mathbb{I} \quad (1)$$

Lời giải

Nếu $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y))$, kết hợp với (1) ta được $x = y$ suy ra f là một hàm đơn ánh. Mặt khác f liên tục suy ra f là một hàm đơn điệu. Thay $x = 0$ vào (1) ta được $f(f(0)) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

Do f là một hàm số đơn điệu nên xảy ra hai khả năng hoặc f đơn điệu tăng hoặc f đơn điệu giảm.

TH1. Giả sử f đơn điệu tăng. Do $f(0) = 0$ suy ra với $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ và $x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$. Ta có f là hàm số đơn điệu tăng và liên tục suy ra f là song ánh liên tục nên f có hàm số ngược g . Dễ thấy g thỏa mãn $x = g(x) + 2g(g(x)), \forall x \in \mathbb{I}$; với $x > 0 \Rightarrow g(x) > 0$ và $x < 0 \Rightarrow g(x) < 0$.

Với mỗi $x > 0$ ta đặt $u_n = g(g(\dots g(x)))$, trường hợp $x < 0$ làm tương tự.

Khi đó ta có $2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \geq 0$, xét phương trình đặc trưng của dãy:

$$2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra $u_n = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 (-1)^n$, trong đó c_1, c_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = u_0 = x \\ c_1 - 2c_2 = 2u_1 = 2f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{2x + 2g(x)}{3} \\ c_2 = \frac{x - 2g(x)}{3} \end{cases}$$

Do đó $u_n = \frac{2x + 2g(x)}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{x - 2g(x)}{3} (-1)^n, n \geq 0$

+) Nếu $g(x) > \frac{x}{2} \Leftrightarrow x - 2g(x) < 0$ thì xét với n chẵn ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ vô lí

+) Nếu $g(x) < \frac{x}{2} \Leftrightarrow x - 2g(x) > 0$ thì xét với n lẻ ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ vô lí.

Suy ra với mỗi $x > 0$ thì $g(x) = \frac{x}{2}$. Vậy $f(x) = 2x, \forall x > 0$.

TH2. Giả sử f là một hàm đơn điệu giảm. Từ $f(0) = 0$ suy ra với $x > 0 \Rightarrow f(x) < 0$ và $x < 0 \Rightarrow f(x) > 0$.

Với mỗi x ta đặt $u_n = f\left(f\left(\dots f\left(\frac{x}{4}\right)\dots f\left(\frac{x}{4}\right)\right)\right)$. Khi đó ta có $u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0, \forall n \geq 0$,

xét phương trình đặc trưng của dãy:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Suy ra $u_n = c_1(-1)^n + c_2(2)^n$, trong đó c_1, c_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = u_0 = x \\ -c_1 + 2c_2 = u_1 = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{2x - f(x)}{3} \\ c_2 = \frac{x + f(x)}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } u_n = \frac{2x - f(x)}{3}(-1)^n + \frac{x + f(x)}{3}2^n, n \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (2) suy ra } u_{2n} = \frac{2x - f(x)}{3} + \frac{x + f(x)}{3}2^{2n}, n \geq 0 \quad (3)$$

$$\text{Nếu } x > 0 \Rightarrow f(x) < 0, f(f(x)) > 0 \Rightarrow 0 < f(f(x)) < 2x \Rightarrow |f(f(x))| < 2|x|$$

$$\text{Nếu } x < 0 \Rightarrow f(x) > 0, f(f(x)) < 0 \Rightarrow 0 < -f(f(x)) < -2x \Rightarrow |f(f(x))| < 2|x|$$

Suy ra $|u_2| \leq 2|x|$, kết hợp với (1) và bằng phương pháp quy nạp ta được

$$|u_{2n}| \leq 2^n |x|, \forall n \geq 0 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có:

$$|x + f(x)| = \left| \frac{u_{2n}}{2^{2n}} + \frac{2x - f(x)}{3 \cdot 2^{2n}} \right| \leq \left| \frac{u_{2n}}{2^{2n}} \right| + \left| \frac{2x - f(x)}{3 \cdot 2^{2n}} \right| \leq \frac{2^n |x|}{2^{2n}} + \left| \frac{2x - f(x)}{3 \cdot 2^{2n}} \right| \quad (5)$$

Từ (5) và cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $f(x) = -x, f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 5 (VMO 2012). Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(1) f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$;

(2) f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$;

(3) $f(f(x)) = f(x) + 12x$ với mọi số thực x .

Lời giải

Từ điều kiện thứ 3, ta có nếu

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Leftrightarrow f(x) + 12x = f(y) + 12y \Leftrightarrow x = y$$

Suy ra f là đơn ánh, kết hợp với (1) ta được f là một song ánh trên $\mathbb{R}$.
Suy ra f có hàm số ngược g . Do f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$ nên g cũng là một hàm số tăng trên $\mathbb{R}$.

Từ (3), thay $x = 0$ ta được $f(f(0)) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$. Do đó $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0$ và $x < 0 \Rightarrow g(x) < g(0) = 0$.

Với mỗi $x > 0$ ta đặt $u_n = g(g(\dots g(x)))$, trường hợp $x < 0$ làm tương tự.

Khi đó ta có $12u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \geq 0$, xét phương trình đặc trưng của dãy:

$$12t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Suy ra $u_n = c_1 \left(\frac{1}{4}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, trong đó c_1, c_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = u_0 = x \\ 3c_1 - 4c_2 = 12u_1 = 12g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{4x + 12g(x)}{7} \\ c_2 = \frac{3x - 12g(x)}{7} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } u_n = \frac{4x + 12g(x)}{7} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3x - 12g(x)}{7} \left(-\frac{1}{3}\right)^n, n \geq 0$$

+) Nếu $g(x) > \frac{x}{4} \Leftrightarrow 3x - 12g(x) < 0$ thì xét với n chẵn ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ vô lí

+) Nếu $g(x) < \frac{x}{4} \Leftrightarrow 3x - 12g(x) > 0$ thì xét với n lẻ ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ vô lí.

Suy ra với mỗi $x > 0$ thì $g(x) = \frac{x}{4}$. Vậy $f(x) = 4x, \forall x > 0$.

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = 4x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Từ điều kiện f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ và f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$ ta có thể chỉ ra được f là một hàm số liên tục. Do đó bài 5 sẽ được giải tương tự như bài tập 4 ở trên. Sau đây ta đưa ra cách chứng minh nhận xét trên dưới dạng một bổ đề như sau:

Bổ đề. Nếu f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ và f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$ thì

f là một hàm số liên tục trên I .

Thật vậy, với mỗi dãy (x_n) sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ ta sẽ chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$. Đặt $u_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, $v_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, khi đó ta có $\lim u_n, \lim v_n$ lần lượt là giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy (u_n) suy ra $\lim u_n = \lim v_n = a$.

Ta dễ thấy (u_n) là một dãy số giảm, còn dãy (v_n) là một dãy số tăng và bất đẳng thức sau:

$$v_n \leq x_n \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Do f là một hàm số tăng nên ta có

$$f(v_n) \leq f(x_n) \leq f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Do dãy (u_n) là dãy giảm bị chặn và f là hàm số tăng nên dãy số $(f(u_n))$ là dãy số giảm và bị chặn, nên tồn tại $\lim f(u_n) = b$. Mặt khác do f là toàn ánh nên tồn tại z sao cho $f(z) = b$. Từ đó ta được:

$$\lim f(u_n) = f(z); f(u_n) \geq f(z) \Rightarrow u_n \geq z, \forall n \geq 1 \quad (3)$$

Do dãy (v_n) là dãy tăng, bị chặn và f là hàm số tăng nên dãy số $(f(v_n))$ là dãy số tăng và bị chặn, nên tồn tại $\lim f(v_n) = c$. Mặt khác do f là toàn ánh nên tồn tại t sao cho $f(t) = c$. Từ đó ta được:

$$\lim f(v_n) = f(t); f(v_n) \leq f(t) \Rightarrow v_n \leq t, \forall n \geq 1 \quad (4)$$

Mặt khác $f(v_n) \leq f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên chuyển qua giới hạn ta được

$$f(z) \geq f(t) \Rightarrow z \geq t \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta thu được

$$v_n \leq t \leq z \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Chuyển qua giới hạn ta được $z = t = a$ suy ra $\lim f(u_n) = \lim f(v_n) = f(a)$ (6)

Từ (2), (6) và theo nguyên lý kẹp ta được:

$$\lim f(x_n) = f(a)$$

Do đó f là hàm số liên tục hay bổ đề được chứng minh.

Bài 6 (APMO 1989). Tìm tất cả các hàm song ánh, tăng $f: I \rightarrow I$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x,$$

với mọi số thực x . Kí hiệu f^{-1} chỉ hàm ngược của hàm số f .

Lời giải.

Từ giả thiết ta được thay x bởi $f(x)$ ta được

$$f(f(x)) - 2f(x) + x = 0, \forall x \in I$$

Với mỗi $x \in I$ ta đặt $u_n = f \left(f \left(\dots f \left(f(x) \right) \right) \right) = f^{(n)}(x)$.

Khi đó ta có $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0, \forall n \geq 0$, xét phương trình đặc trưng của dãy:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Khi đó $u_n = c_1 n + c_2$, trong đó c_1, c_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = u_0 = x \\ c_1 + c_2 = u_1 = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = f(x) - x \\ c_2 = x \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} u_n &= n(f(x) - x) + x = f^{(n)}(x), n \geq 0 \Rightarrow f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) = n(f(x) - x - f(0)) + x \\ \Rightarrow \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{n} - \frac{x}{n} &= f(x) - x - f(0) \end{aligned} \quad (1)$$

Do f là hàm số tăng trên I nên $f^{(n)}(x) > f^{(n)}(0)$ nếu $x > 0$ và $f^{(n)}(x) < f^{(n)}(0)$ nếu $x < 0$ (2)

Do đó trong (1) cho $n \rightarrow +\infty$ và kết hợp với (2) ta được

$$f(x) - x - f(0) \geq 0 \text{ với } x > 0 \text{ và } f(x) - x - f(0) \leq 0 \text{ với } x < 0 \quad (3)$$

Tiếp theo từ giả thiết thay x bởi $f^{-1}(x)$ ta được

$$f^{-1}(f^{-1}(x)) - 2f^{-1}(x) + x = 0, \forall x \in I$$

Với mỗi $x \in I$ ta đặt $v_n = f^{-1} \left(f^{-1} \left(\dots f^{-1} \left(f^{-1}(x) \right) \right) \right) = f^{(-n)}(x)$.

Khi đó ta có $v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0, \forall n \geq 0$, xét phương trình đặc trưng của dãy:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Khi đó $v_n = c_1 n + c_2$, trong đó c_1, c_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = v_0 = x \\ c_1 + c_2 = v_1 = f^{-1}(x) = 2x - f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x - f(x) \\ c_2 = x \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} v_n &= n(x - f(x)) + x = f^{(-n)}(x), n \geq 0 \Rightarrow f^{(-n)}(x) - f^{(-n)}(0) = -n(f(x) - x - f(0)) + x \\ \Rightarrow \frac{f^{(-n)}(x) - f^{(-n)}(0)}{n} - \frac{x}{n} &= -(f(x) - x - f(0)) \end{aligned} \quad (4)$$

Do f là hàm số tăng trên I suy ra f^{-1} cũng là hàm tăng suy ra $f^{(-n)}(x) > f^{(-n)}(0)$ nếu $x > 0$ và $f^{(-n)}(x) < f^{(-n)}(0)$ nếu $x < 0$ (5)

Do đó trong (4) cho $n \rightarrow +\infty$ và kết hợp với (5) ta được

$$f(x) - x - f(0) \leq 0 \text{ với } x > 0 \text{ và } f(x) - x - f(0) \geq 0 \text{ với } x < 0 \quad (6)$$

Do đó từ (3) và (6) ta được

$$f(x) = x + f(0), \forall x \in I.$$

Do đó hàm số cần tìm là

$$f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{I}, \text{ trong đó } a \text{ là hằng số cho trước.}$$

Bài tập tương tự

Bài 7. Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)) + f(x) = 12x, \text{ với mọi } x \in (0; +\infty)$$

Bài 8. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)) = f(x) + x, \text{ với mọi } x \in \mathbb{I}$$

Bài 9. Tìm tất cả các hàm song ánh, tăng $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + 4f^{-1}(x) = 4x,$$

với mọi số thực x . Kí hiệu f^{-1} chỉ hàm số ngược của hàm số f .

Bài 10. Cho α là một số cố định khác 0. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ sao cho

$$f\left(2x - \frac{f(x)}{\alpha}\right) = \alpha x,$$

với mọi số thực x .

Bài 11. Cho hai hàm số liên tục $f : [a; b] \rightarrow [a; b]; g : [a; b] \rightarrow [a; b]$ thỏa mãn điều kiện $f(g(x)) = g(f(x)), \forall x \in [a; b]$. Biết rằng f là hàm số tăng. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [a; b]$ sao cho $f(c) = g(c) = c$.

Bài 12. Tìm tất cả các hàm số tăng $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = x, \forall x \in (0; +\infty)$$

Bài 13. Cho n là một số nguyên dương cho trước. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\underbrace{f\left(f\left(\dots f\left(\frac{x}{4}\right)\right)\right)}_n\right) = -x, \text{ với mọi } x \in \mathbb{I}.$$

Bài 14. Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(f(x))) + f(f(x)) = 2x + 5, \text{ với mọi } x \in (0; +\infty).$$

Bài 15. Cho $f, g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ là hai song ánh, tăng thỏa mãn điều kiện

$$f(g^{-1}(x)) + g(f^{-1}(x)) = 2x,$$

với mọi $x \in \mathbb{I}$. Giả sử tồn tại $a \in \mathbb{I}$ sao cho $f(a) = g(a)$. Chứng minh rằng $f(x) = g(x)$ với mọi số thực x .

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.



KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ VII - NĂM 2011
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150' không kể thời gian giao đề

(Đề thi gồm 05 câu in trong 01 trang)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (4,0 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \\ y + \frac{y}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{35}{12} = 0 \end{cases}$$

Câu 2 (4,0 điểm). Ký hiệu $\mathbb{N}$ chỉ tập hợp các số tự nhiên. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) > 0$ và

$$f(m^2 + 3n^2) = (f(m))^2 + 3(f(n))^2,$$

với mọi $m, n \in \mathbb{N}$.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có các góc thỏa mãn $C < B < A$ nội tiếp trong đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . M là điểm chính giữa cung nhỏ BC , N là trung điểm cạnh BC . Điểm E đối xứng với I qua N . Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q . Chứng minh rằng:

i). Điểm Q thuộc cung nhỏ AC của đường tròn (O) .

ii). $BQ = AQ + CQ$.

Câu 4 (4,0 điểm). Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $7^n + 147$ là số chính phương.

Câu 5 (4,0 điểm). Một hội nghị Toán học quốc tế có 2011 nhà toán học tham dự. Biết rằng một nhà toán học bất kỳ trong số đó quen biết ít nhất với 1509 nhà toán học khác. Hỏi có thể lập ra một tiểu ban gồm 5 nhà toán học mà người bất kỳ trong 5 người đó đều quen biết những người còn lại của tiểu ban đó hay không?

----- Hết -----

Giám thị số 1:

Họ tên thí sinh:

Giám thị số 2:

SBD:

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.

TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG
LẦN THỨ VII - LÀO CAI



KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ VII - NĂM 2011
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN THI: TOÁN
(*Hướng dẫn chấm được in trong 05 trang*)

HDC ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (4 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 & (1) \\ y + \frac{y}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{35}{12} = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn chấm

Nội dung trả lời	Điểm
Điều kiện: $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 1$ Với $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ta có	0.25
$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = 1 \\ (y + \sqrt{y^2 + 1})(-y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \end{cases}$	0.25
Kết hợp với (1) ta được	
$\begin{cases} y + \sqrt{y^2 + 1} = -x + \sqrt{x^2 + 1} & (3) \\ x + \sqrt{x^2 + 1} = -y + \sqrt{y^2 + 1} & (4) \end{cases}$	0.5
Cộng (3) và (4) ta được $y = -x$, thế vào (2) ta có	
$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12} \quad (5)$	0.5
Từ (5), nhận xét $x > 0$. Do đó	
$(5) \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{35}{12}$	1
Đặt $\begin{cases} a = \frac{1}{x} \\ b = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$ (từ đây chú ý là $a > 0, b > 0$), ta có	
$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{35}{12} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{12}{35}(a + b) \\ (a + b)^2 - 2ab - 1 = 0 \end{cases}$	0.5

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{12}{35}(a+b) \\ (a+b)^2 - \frac{24}{35}(a+b) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a+b = \frac{7}{5} \\ ab = \frac{12}{25} \end{cases} \\ \begin{cases} a+b = -\frac{5}{7} \\ ab = -\frac{12}{49} \end{cases} \text{ (loại)} \end{cases}$	0.5
$\Leftrightarrow \begin{cases} (a; b) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right) \\ (a; b) = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) \end{cases}$	0.25
Với $(a; b) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$, ta có $(x; y) = \left(\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ Với $(a; b) = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$, ta có $(x; y) = \left(\frac{5}{4}; -\frac{5}{4}\right)$ ■	0.25

Câu 2 (4 điểm). Kí hiệu $\mathbb{N}$ chỉ tập hợp các số tự nhiên. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) > 0$ và

$$f(m^2 + 3n^2) = (f(m))^2 + 3(f(n))^2 \quad (1),$$

với mọi $m, n \in \mathbb{N}$.

Hướng dẫn chấm

Nội dung trả lời	Điểm
-Trong (1): +) cho $m = n = 0$ ta được $f(0) = 4f^2(0) \Rightarrow f(0) = 0$ (do $f(0) \in \mathbb{N}$) +) cho $m = 1, n = 0$ ta được $f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 1$ (do $f(1) > 0$) +) cho $m = 1, n = 0$ ta được $f(3) = 3$ Hơn nữa, với $\forall n \geq 1$ thì $(n+2)^2 + 3n^2 = (n-1)^2 + 3(n+1)^2$ Nên: $f^2(n+2) + 3f^2(n) = f[(n+2)^2 + 3n^2] = f[(n-1)^2 + 3(n+1)^2] = f^2(n-1) + 3f^2(n+1)$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó cho $n = 1$, ta được $f(2) = 2$ (do $f(2) \in \mathbb{N}$). Do vậy, $f(n) = n$ với $n \in \{0; 1; 2; 3\}$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ (2). Thật vậy:	0.25
-Giả sử (2) đúng đến $n \geq 2$, ta chứng minh (2) cũng đúng đến $n+1$. Ta có $(n+1)^2 + 3(n-1)^2 = (n-2)^2 + 3n^2$ với mọi $n \geq 2$ nên $f^2(n+1) + 3f^2(n-1) = f[(n+1)^2 + 3(n-1)^2] =$	0.25
	0.5

$= f[(n-2)^2 + 3n^2] = f^2(n-2) + 3f^2(n)$ với mọi $n \geq 2$. Do $f(n-1) = n-1; f(n-2) = n-2; f(n) = n$ nên $f^2(n+1) + 3(n-1)^2 = (n-2)^2 + 3n^2$ Hay $f^2(n+1) = (n+1)^2$. Do đó, $f(n+1) = n+1$ (do $f(n+1) \in \mathbb{N}$). Theo nguyên lý quy nạp, ta có $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Thử lại, đúng. ■	1 0.75 0.25
--	---------------------------

Câu 3 (4 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có các góc thỏa mãn $C < B < A$ nội tiếp trong đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . M là điểm chính giữa cung nhỏ BC , N là trung điểm cạnh BC . Điểm E đối xứng với I qua N . Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q . Chứng minh rằng:

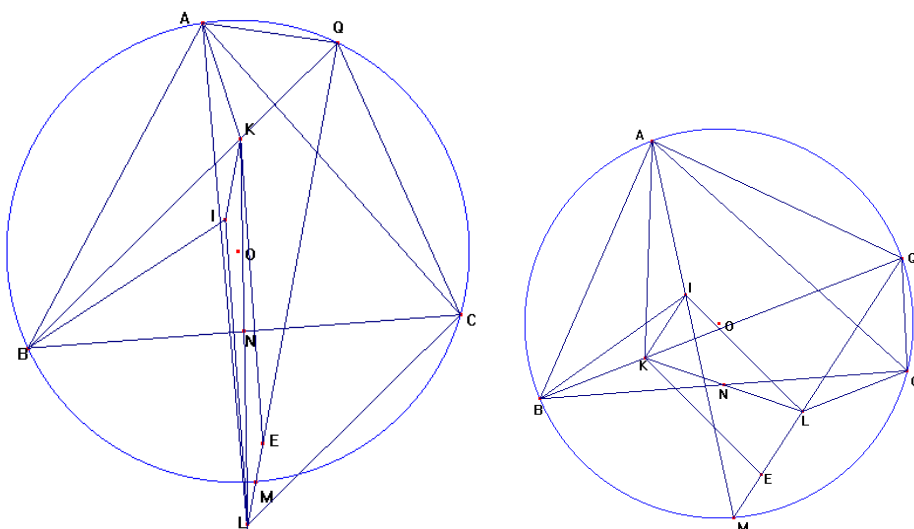
- i). Điểm Q thuộc cung nhỏ AC của đường tròn (O) .
 ii). $BQ = AQ + CQ$.

Hướng dẫn chấm

i) (1 điểm).

Nội dung trả lời	Điểm
Ta có $\widehat{NCE} = \widehat{IBN} = \frac{1}{2} \widehat{B} < \frac{1}{2} \widehat{A} = \widehat{NCM}$. Do đó E nằm trong góc $\widehat{NCM}$ (1)	0.25
Do $\widehat{B} > \widehat{C}$ nên N và C nằm về cùng một phía đối với AM . Do đó E và C nằm về cùng một phía đối với AM (2).	0.5
Từ (1) và (2) suy ra E nằm trong góc $\widehat{AMC}$. Vậy Q thuộc cung nhỏ AC . ■	0.25

ii) (3 điểm).

Nội dung trả lời	Điểm
 Gọi K là điểm trên đoạn BQ sao cho $QK = QA$ (*).	0.25

Khi đó ta có $\triangle QAK$ cân tại Q và

$$(QA, QB) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi}. \text{ Do đó}$$

$$(AK, AQ) \equiv \frac{1}{2}(BC, BA) + \frac{1}{2}(AB, AC) \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (AK, AI) + (AI, AC) + (AC, AQ) \equiv \frac{1}{2}(BC, BA) + \frac{1}{2}(AB, AC) \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (AK, AI) + (AC, AQ) \equiv \frac{1}{2}(BC, BA) \pmod{\pi} \quad (3)$$

Ta lại có

$$(BC, BI) \equiv \frac{1}{2}(BC, BA) \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (BK, BI) + (BC, BQ) \equiv \frac{1}{2}(BC, BA) \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (BK, BI) + (AC, AQ) \equiv \frac{1}{2}(BC, BA) \pmod{\pi} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $(AK, AI) \equiv (BK, BI) \pmod{\pi}$.

Do đó, bốn điểm A, I, K, B đồng viên.

-Mặt khác $(AM, AB) \equiv (QM, QB) \pmod{\pi}$ (do A, M, Q, B đồng viên)

Hay:

$$\begin{aligned} (AI, AB) &\equiv (QM, QK) \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow (KI, KB) &\equiv (MQ, QK) \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow (KI, KQ) + (KQ, MQ) &\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow (KI, MQ) &\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow KI &\parallel MQ \end{aligned}$$

Gọi KN cắt MQ tại L khi đó $KILE$ là hình bình hành. Do đó N là trung điểm KL

Vậy $BKCL$ là hình bình hành

Mặt khác ta có $BK \parallel CL, BK = CL$ (5) và $\widehat{CLQ} = \widehat{BQL} = \widehat{CQL}$ (5)

suy ra $CL = QC$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $BK = QC$ (7)

Từ (*) và (7) ta có $BQ = QA + QC$ ■.

Nhận xét: Nếu học sinh làm theo phương pháp không dùng góc định hướng thì phải xét hai trường hợp như 2 hình vẽ trong đáp án. Nếu chỉ làm đúng được một trường hợp, cho 1,5 điểm.

Câu 4 (4 điểm). Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $7^n + 147$ là số chính phương.

Hướng dẫn chấm

Nội dung trả lời	Điểm
Để thấy $n = 0$ thì $7^n + 147 = 148$ không là số chính phương.	0.25
Xét $n > 0$	
Nếu n lẻ, đặt $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$. Ta có $7^{2k+1} + 147 \equiv (-1)^{2k+1} + 3 \equiv 2 \pmod{4}$, suy ra $7^n + 147$ không là số chính phương	1
Nếu n chẵn, đặt $n = 2k (k \geq 1, k \in \mathbb{N})$. Giả sử tồn tại số nguyên a sao cho : $7^n + 147 = a^2$	0.25
thì $a : 7$, đặt $a = 7m (m \in \mathbb{Z})$. Khi đó $7^n + 147 = a^2 \Leftrightarrow 7^{2k} + 147 = 49m^2 \Leftrightarrow m^2 - 7^{2k-2} = 3 \Leftrightarrow (m - 7^{k-1})(m + 7^{k-1}) = 3$	0.5
$\Rightarrow \begin{cases} m - 7^{k-1} = 1 \\ m + 7^{k-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 2$	1
Vậy khi $n = 2$ thì $7^n + 147$ là số chính phương ■	1

Câu 5 (4 điểm). Một hội nghị Toán học quốc tế có 2011 nhà toán học tham dự. Biết rằng một nhà toán học bất kỳ trong số đó quen biết ít nhất với **1509** nhà toán học khác. Hỏi có thể lập ra một tiểu ban gồm **5** nhà toán học mà người bất kỳ trong **5** người đó đều quen biết những người còn lại của tiểu ban đó hay không?

Hướng dẫn chấm

Nội dung trả lời	Điểm
Gọi S là tập hợp các nhà Toán học trong hội nghị, thì $ S = 2011$. Giả sử $x, y \in S$, ta quy ước nếu x, y quen biết nhau thì viết $(x, y) = 1$. Xét $a, b \in S$ mà $(a, b) = 1$. Đặt $A = \{c \in S c \neq b, (c, a) = 1\}$ $B = \{c \in S c \neq a, (c, b) = 1\}$	0.5
Thì $ A \geq 1508, B \geq 1508, A \cup B \leq 2009$.	0.5
Suy ra $ A \cap B = A + B - A \cup B \geq 2.1508 - 2009 = 1007$.	0.5
Do đó tồn tại $c \in A \cap B$, tức là tồn tại 3 nhà toán học a, b, c đôi một quen biết nhau.	0.5
Xét $C = \{d \in S d \neq a, d \neq b, (d, c) = 1\}$ thì $ C \geq 1507$ và $ (A \cap B) \cup C \leq 2009$. Suy ra $ A \cap B \cap C = A \cap B + C - (A \cap B) \cup C \geq 1007 + 1507 - 2009 = 505$.	0.5
Do đó tồn tại $d \in A \cap B \cap C$, chứng tỏ có 4 nhà toán học a, b, c, d đôi một quen biết nhau.	
Tiếp tục, xét $D = \{e \in S e \neq a, e \neq b, e \neq c, (e, d) = 1\}$ thì $ D \geq 1506$ và $ (A \cap B \cap C) \cup D \leq 2009$. Suy ra $ A \cap B \cap C \cap D = A \cap B \cap C + D - (A \cap B \cap C) \cup D \geq 505 + 1506 - 2009 = 2$. Do đó tồn tại $e \in A \cap B \cap C \cap D$, chứng tỏ có 5 nhà toán học a, b, c, d, e đôi một quen biết nhau.	0.5
Vậy có thể lập ra một tiểu ban gồm 5 nhà toán học mà bất kỳ trong 5 người đó đều quen	

biết những người còn lại của tiểu ban đó.		0.5
---	---	-----

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.

TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG
LẦN THỨ VII - TẠI LÀO CAI



HDC ĐỀ DỰ BỊ

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ VII - NĂM 2011
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN THI: TOÁN
(*Hướng dẫn chấm được in trong 04 trang*)

Câu 1 (4 điểm). Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y = -2 \\ \sqrt{x^2 + y^3} = 5x - y \end{cases}$$

Hướng dẫn chấm

Nội dung trả lời	Điểm
Ta có : $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y = -2 \\ \sqrt{x^2 + y^3} = 5x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x = (y-1)^3 + (y-1) \\ \sqrt{x^2 + y^3} = 5x - y \end{cases}$	1
Hàm số $f(x) = x^3 + x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $f(x) = f(y-1) \Leftrightarrow x = y-1$	1
Do đó $\begin{cases} x^3 + x = (y-1)^3 + (y-1) \\ \sqrt{x^2 + y^3} = 5x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ \sqrt{x^2 + y^3} = 5x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ \sqrt{(y-1)^2 + y^3} = 4y-5 \end{cases}$	1
Ta có $\sqrt{(y-1)^2 + y^3} = 4y-5 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{5}{4} \\ y^3 - 15y^2 + 38y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 12 \end{cases}$	
Vậy hệ có 2 nghiệm : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 11 \\ y = 12 \end{cases}$ ■	1

Câu 2 (4 điểm). Có tồn tại hay không một hàm số $f : N^* \rightarrow N^*$ sao cho:

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n) \text{ với mọi } n \geq 2.$$

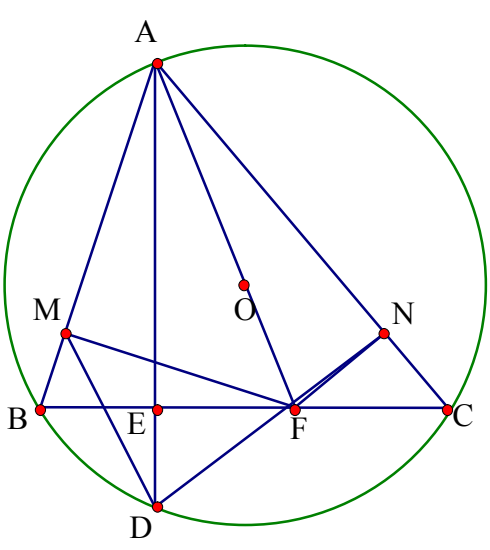
Hướng dẫn chấm

Nội dung trả lời	Điểm
Ta chứng minh bằng phản chứng là không tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu. Vì $f : N^* \rightarrow N^*$ nên $f(n) \geq 1$, với mọi $n \in N^*$.	0.5
Từ giả thiết có $f(n+1) - f(n) = f(f(n-1)) \geq 1, \forall n \geq 2$, suy ra f là hàm đồng biến	0.5

trên tập $n \geq 2$, do đó $f(n) \geq f(n-1) + 1 \geq \dots \geq f(2) + n - 2 \geq 1 + n - 2, \forall n \geq 2$ $\Rightarrow f(n) \geq n - 1, \forall n \geq 2. \quad (1)$	0.5
Từ giả thiết ta lại có $f(f(n-1)) < f(n+1), \forall n \geq 2$ hay $f(f(n)) < f(n+2), \forall n \geq 1$, do f là hàm đồng biến trên tập $n \geq 2$ nên có $f(n) < n + 2, \forall n \geq 2$ hay $f(n) \leq n + 1, \forall n \geq 2 \quad (2)$	1
Từ (1) và (2) suy ra $f(n+1) - f(n) \leq (n+2) - (n-1) = 3, \forall n \geq 2 \quad (3)$	0.5
Mặt khác từ (1) ta có: $f(f(n-1)) \geq f(n-1) - 1 \geq (n-2) - 1 = n - 3 > 3, \forall n \geq 7 \quad (4)$	0.5
Từ (3) và (4) suy ra điều mâu thuẫn. Vậy không tồn tại hàm số nào thỏa mãn yêu cầu. ■	0.5

Câu 3 (4 điểm). Cho tam giác nhọn ABC, trên cạnh BC lấy các điểm E, F sao cho góc $\angle BAE = \angle CAF$, gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng AB và AC, kéo dài AE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Chứng minh rằng tứ giác AMDN và tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn chấm

Nội dung trả lời	Điểm
 Đặt $\angle BAE = \angle CAF = \alpha$, $\angle EAF = \beta$.	

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB.AF.\sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} AC.AF.\sin \alpha = \frac{AF}{4R} (AB.CD + AC.BD)$ (R-là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC) (1) Diện tích tứ giác ADMN là $S_{AMDN} = \frac{1}{2} AM.AD.\sin \alpha + \frac{1}{2} AD.AN.\sin(\alpha + \beta) =$ $= \frac{1}{2} AD.[AF.\cos(\alpha + \beta).\sin \alpha + AF.\cos \alpha.\sin(\alpha + \beta)] =$ $= \frac{1}{2} AD.AF.\sin(2\alpha + \beta) = \frac{AF}{4R}.AD.BC. (2)$ Vì tứ giác AMDN nội tiếp trong đường tròn nên theo định lí Ptoleme ta có $AB.CD + AC.BD = AD.BC$ (3). Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh ■	1 1 1 1
---	-------------------------------------

Câu 4 (4 điểm). Chứng minh rằng phương trình sau đây không có nghiệm nguyên dương
 $x^4 - 1 = (2y + 1)^3$

Hướng dẫn chấm

Nội dung trả lời	Điểm
$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (2y + 1)^3$. Lập luận x chẵn, do đó $(x^2 - 1; x^2 + 1) = 1$	1
khi đó $\begin{cases} x^2 - 1 = a^3 \\ x^2 + 1 = b^3 \end{cases}$ trong đó a, b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thỏa mãn $ab = 2y + 1$.	1
$\Rightarrow (x^2 + 1) - (x^2 - 1) = b^3 - a^3 \Leftrightarrow 2 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$	1
khi đó $a^2 + ab + b^2$ là ước nguyên dương của 2 và phải lớn hơn hoặc bằng 3, vô lý; phương trình vô nghiệm. ■	1

Câu 5 (4 điểm). Trên đường tròn (C) cho 2011 điểm. Hỏi có bao nhiêu cách xóa đi 11 điểm sao cho không có hai điểm bị xóa nào cạnh nhau.

Hướng dẫn chấm

Nội dung trả lời	Điểm
Ta gọi một trong số 2011 điểm là A. Có hai trường hợp sau: Trường hợp 1. Điểm A không bị xóa. Sau khi xóa đi 11 điểm còn lại 2000 điểm. Xen kẽ xen kẽ giữa 2000 điểm này có 2000	

khoảng trống. Mười một điểm bị xóa tương ứng với 11 trong số 2000 khoảng trống nói trên. Do đó số cách thực hiện trong trường hợp này bằng $C_{2000}^{11} = \frac{2000!}{11!.1989!}$	1,5
Trường hợp 2. Điểm A bị xóa. Sau khi xóa tiếp 10 điểm, còn lại 2000 điểm. Xen kẽ xen kẽ giữa 2000 điểm này có 1999 khoảng trống không kể với vị trí của điểm A. 10 điểm bị xóa (không kể điểm A) tương ứng với 10 trong số 1999 khoảng trống nói trên. Do đó số cách thực hiện trong trường hợp này bằng $C_{1999}^{10} = \frac{1999!}{10!.1989!}$	1,5
Theo quy tắc cộng số cách xóa cần tìm thỏa mãn đề bài là: $C_{2000}^{11} + C_{1999}^{10} = \frac{2000!}{11!.1989!} + \frac{1999!}{10!.1989!} \quad \blacksquare$	0,5

Ghi chú: Thí sinh làm cách khác đáp án vẫn cho điểm tối đa theo từng phần.

-----Hết-----

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.

**ĐỀ DỰ BỊ****Câu 1 (4,0 điểm).** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y = -2 \\ \sqrt{x^2 + y^3} = 5x - y \end{cases}$$

Câu 2 (4,0 điểm). Có tồn tại hay không một hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n) \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC, trên cạnh BC lấy các điểm E, F sao cho góc $BAE = CAF$, gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng AB và AC, kéo dài AE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Chứng minh rằng tứ giác AMDN và tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

Câu 4 (4,0 điểm). Chứng minh rằng phương trình sau đây không có nghiệm nguyên dương $x^4 - 1 = (2y + 1)^3$

Câu 5 (4,0 điểm). Trên đường tròn (C) cho 2011 điểm. Hỏi có bao nhiêu cách xóa đi 11 điểm sao cho không có hai điểm bị xóa nào cạnh nhau.

----- **Hết** -----

Giám thị số 1:.....

Họ tên thí sinh:.....

Giám thị số 2:.....

SBD:.....

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.